V.V. BELETSKI

ESSAIS SUR LE MOUVEMENT DES CORPS COSMIQUES

V.V. BELETSKI

ESSAIS SUR LE MOUVEMENT DES CORPS COSMIQUES

DÉDICACE

Ferri Bren, simple soldat de l'armée austro-hongroise, était à bout de forces. Il faisait nuit noire quand il déboucha de la forêt sur un chemin vicinal. Un charroi roulait sur la route. On distinguait à peine les rares silhouettes des cochers; les sabots des chevaux pataugeaient dans la boue. Sans hésiter Ferri Bren bascula dans un chariot qui roulait sans cocher, tira sur lui un coin de bâche et s'endormit.

Un bon coup de poing dans les côtes le réveilla à l'aube. Un groupe de cochers, soldats de l'armée de l'Empire russe, se tenait autour de lui. Rigolant, jurant sans méchanceté et donnant à Ferri Bren des tapes amicales sur le ventre, ils le délestèrent de son arme et de son havresac. Légèrement apeuré, l'Allemand slovène Ferri Bren sauta au bas de la téléga sur un sol visqueux d'automne, le sol de la Russie. Sans savoir que c'est à jamais. Qu'il combattrait aux rangs du régiment international de la Garde rouge. Qu'il vivrait et travaillerait pendant cinquante ans en cette nouvelle patrie. Qu'il aurait une nombreuse famille adoptive et qu'il la ferait vivre de son rare métier de couturier de théâtre. Et qu'il reposerait dans un cimetière paisible de la lointaine ville d'Irkoutsk...

Et qu'il y aurait un jour ce livre dédié à sa mémoire, à la mémoire de Fédor Iossifovitch Bren, mon grand-père.

V.B.

PRÉFACE DE L'AUTEUR

L'Univers respire, infini,
Passent des fusées comme des gouttes de soleil.
Ce sont vos rêves et prémonitions.
Vos connaissances. Vos insomnies.

R. Rojdestvenski
A ceux dont j'ignore les noms

Dans les chapitres qui vont suivre, nous parlerons de certains résultats théoriques intéressants obtenus en mécanique du vol spatial, c'est-à-dire en théorie du mouvement des engins spatiaux. Quelques problèmes récents relatifs à la mécanique céleste seront également évoqués.

Cet ouvrage n'est pas destiné à l'enseignement: l'auteur n'y propose donc pas un exposé systématique et complet de la discipline « Mécanique du vol spatial ». Il y a plus: bon nombre de résultats remarquables, aussi intéressants qu'importants, n'y seront même pas mentionnés. Notre objectif est différent. Au cours de son développement dynamique, la mécanique du vol spatial a donné naissance à toute une série de problèmes qui attirent l'esprit par leur élégance et leur nouveauté. Mon intention était de faire connaître au lecteur des découvertes originales, parfois inattendues, qui ont permis de remettre en question certains problèmes classiques de la mécanique; mon intention était aussi de signaler certains problèmes qui se posent aujourd'hui en dynamique du vol spatial.

Or, on ne peut pas parler des problèmes de mécanique du vol spatial sans décrire les méthodes de recherche employées. La mécanique du vol spatial utilise aujourd'hui essentiellement les méthodes et résultats de la mécanique rationnelle et céleste, des sciences industrielles et des mathématiques. Pour employer une locution à la mode on peut dire que la mécanique du vol spatial est née au carrefour de ces disciplines.

Tous les problèmes évoqués n'ont pas la même importance. Quelques-uns ont déjà servi à de nouvelles réalisations connues de tous (les lancements de spoutniks, de luniks, ...), d'autres trouveront leur emploi dans un avenir proche (les voyages interplanétaires à faible poussée); il y a aussi des problèmes dont nous ne distinguons pas encore nettement le champ d'application. Ils ont cependant tous

une qualité en commun : ils sont captivants. En tout cas, l'auteur fera son possible pour en persuader un lecteur visé : l'étudiant en mécanique générale qui pense déjà au choix de sa future spécialité. L'auteur veut lui faciliter le choix !

Si, grâce à ce livre, le lecteur a pu se faire une première idée de ce monde merveilleux et plein de dynamisme qu'est la mécanique du vol spatial, l'auteur pourra se féliciter : il s'est bien acquitté de sa tâche.

Dans un ouvrage écrit sur un sujet comme le nôtre, on est presque toujours obligé de faire des calculs encombrants. L'auteur essaie toutefois de souligner, chaque fois que cela est possible, l'élégance du processus même de la recherche qui conduit à tel ou tel résultat. L'accent est mis sur l'analyse des résultats, matérialisés sous forme de diagrammes, de dessins, parfois de chiffres. Nous avons tâché de rendre notre exposé aussi clair que possible, usant de procédés géométriques élégants. Un exemple typique en est l'analyse des intégrales premières du mouvement.

Nous avons dû ouvrir quelques « parenthèses » consacrées à des rappels de mécanique et de mathématiques, indispensables à la lecture, mais qui n'alourdiront pas outre mesure, nous l'espérons, le style léger de ces essais. L'auteur ne veut pas se priver du plaisir tantôt d'avancer une hypothèse peu sérieuse, tantôt de faire une analogie inattendue, à l'instar des auteurs d'ouvrages de vulgarisation scientifique et de science-fiction. Cependant l'appareil mathématique utilisé partout dans ce livre — les systèmes d'équations différentielles ordinaires — est vraiment trop sérieux pour qu'on puisse prétendre que ces *Essais* sont à la portée d'un lecteur non averti.

A notre avis, le niveau d'instruction indispensable à la bonne intelligence de tous les chapitres est celui d'un étudiant d'Université de troisième, voire de quatrième année (plus rarement de deuxième) en mécanique, physique, mathématiques, ou sciences techniques ; certains passages sont même à la portée d'un collégien un peu doué. Il y a pourtant aussi des points plus difficiles. Ils ne doivent pas dérouter le lecteur, qui, armé d'un crayon et d'une feuille de papier, fera son possible pour décrypter le texte. Notons que l'auteur s'est toujours efforcé d'« alléger » son style, de le « désencombrer», de bannir tout académisme. Il n'aura pas toujours réussi ; le lecteur voudra bien l'en excuser, comprenant pertinemment que les traditions sont parfois plus fortes que les bonnes intentions.

L'auteur espère que son livre procurera aussi quelques moments de détente à d'autres lecteurs : aux étudiants des dernières années de l'Université, aux étudiants post-universitaires préparant leur thèse, aux professeurs de mécanique rationnelle, aux chercheurs et ingénieurs en mécanique du vol spatial et des spécialités connexes. L'auteur a déjà eu l'occasion de se rendre compte de l'impact du contenu et du style de ces *Essais* sur les lecteurs de toutes ces catégories devant

lesquels il a fait des conférences de caractère général sur les sujets traités dans différentes universités de l'Union Soviétique.

Nous faisons souvent référence, dans le texte, aux publications des chercheurs contemporains en mécanique et en mathématiques; d'autre part, les propres recherches de l'auteur sont aussi très largement représentées dans le livre.

Il faut dire qu'en général ce livre ne touche qu'une petite partie des problèmes qui se posent aujourd'hui en mécanique du vol spatial et en mécanique céleste. Certaines questions mentionnées n'ont trouvé leur réponse que tout dernièrement. Or, n'oublions pas que tout progrès est dérisoire face à la Nature. Il y a eu et il y aura toujours plus de problèmes non résolus, voire non encore posés, que de problèmes résolus. Sir Isaac Newton a dit: « Je ne sais pas ce qu'on dira de mes recherches. Quant à moi, je me suis toujours comparé à un petit garçon qui, jouant au bord de la mer, ramasse tantôt un galet aux couleurs vives, tantôt une coquille châtoyante, tandis que l'immense océan de la Vérité sans fond et sans bornes s'étend devant moi. »

J'ai eu de la chance de faire mes études sous la direction de scientifiques et pédagogues éminents *), en compagnie de ceux qui deviendront plus tard des chercheurs de renom, puis de travailler aux côtés de spécialistes chevronnés. Puisse ce livre exprimer ma reconnaissance à mes maîtres, à mes amis et à mes collègues!

L'auteur tient à remercier Dmitri Okhotsimski d'avoir soutenu l'idée de ce livre; Vladimir Diomine, de s'être chargé de la lourde tâche de rédacteur; Natalia Konikova et Evguénia Stépanova, d'avoir mis en ordre le manuscrit; Nikolaï Parousnikov et Géorgui Sazykine, d'avoir fait preuve de solidarité et d'enthousiasme à toute épreuve.

Ce livre serait sûrement resté en chantier sans les soins quotidiens de Nina Béletskaïa. Les bons conseils de Timour Enéev m'ont été précieux.

L'auteur exprime une gratitude particulière au docteur ès sciences physico-mathématiques Igor Novojilov dont les merveilleuses illustrations graphiques ont embelli le livre.

L'auteur voudrait aussi dire un mot sur les techniciens dont les succès notoires dans la conquête du cosmos et dans la mise au point des techniques spatiales ont stimulé le progrès en maints domaines des sciences exactes. On rencontre rarement leurs noms sur les pages des revues; ils n'écrivent presque jamais de livres et soutiennent rarement des thèses. Mais, sans leur contribution, beaucoup de thèses en mécanique seraient restées non soutenues et beaucoup de livres n'auraient pas été écrits. Y compris celui que vous tenez dans les mains.

L'auteur

*) Je voudrais nommer en premier lieu Vladimir Goloubev, Nikolaï Tchétaïev et Arkadi Kosmodémianski.

PREMIER ESSAI

SUR LE MOUVEMENT PERTURBÉ ET NON PERTURBÉ D'UN SATELLITE, AVEC UNE PARENTHÈSE SUR LES MÉTHODES ASYMPTOTIQUES DE LA MÉCANIQUE NON LINÉAIRE

— ...Mon ami Fagot, montre-nous pour commencer quelque chose d'un peu simple.

M. Boulgakov

Le Maître et Marguerite

1. On a de la chance

Commençons par quelques résultats classiques, trop connus pour être captivants mais absolument indispensables par la suite.

Le fondement de la mécanique céleste et de la mécanique du vol spatial est la loi de la gravitation universelle de Newton : deux points matériels de masses m et M s'attirent avec la force

$$F = \frac{fmM}{r^2}, \tag{1.1.1}$$

où r est la distance entre les points et f la constante universelle de gravitation ($f = 6{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3 \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$).

Si l'on considère le mouvement d'un point (m) par rapport à l'autre (M) abstraction faite de toutes les forces sauf **F**, les équations différentielles du mouvement s'écriront sous la forme [1.1] *)

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = 0, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = 0, \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = 0, \tag{1.1.2}$$

où $\mu = f(M + m)$, x, y, z sont les coordonnées du point m dans un système de coordonnées d'origine en M animé d'un mouvement de translation, et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Ces équations se laissent aisément intégrer au moyen de fonctions élémentaires. Cette circonstance a une importance toute particulière. En effet, nous avons négligé toutes les forces appliquées au point considéré m sauf **F**. Cependant ces forces existent, si bien que les équations du mouvement devraient s'écrire

$$\ddot{x} + \frac{\mu x}{r^3} = f_x, \quad \ddot{y} + \frac{\mu y}{r^3} = f_y, \quad \ddot{z} + \frac{\mu z}{r^3} = f_z, \tag{1.1.3}$$

où f_x, f_y, f_z sont les composantes des accélérations additionnelles. Les équations (1.1.3) ne sont déjà pas intégrables en général. Presque

*) Voir la bibliographie en fin du livre.

tous les problèmes de mécanique se définissent malheureusement par des équations non intégrables, sauf quelques problèmes rares tels que le mouvement de deux points matériels sous l'action de la force (1.1.1) de l'attraction mutuelle.

Le destin a voulu que la race humaine apparaisse et évolue sur une planète gravitant autour d'une étoile non binaire (le Soleil), en compagnie d'autres planètes fort éloignées l'une de l'autre et beaucoup moins massives que l'astre central. Dans ces conditions, on peut sans grande erreur employer les équations (1.1.2) qui définissent le mouvement de chaque planète sous l'action de la seule force d'attraction de la planète par le Soleil. En effet, les équations « exactes » (1.1.3) ne diffèrent de (1.1.2) que par des composantes f_x, f_y, f_z qui sont absolument négligeables en l'occurrence:

$$\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2} \ll \mu/r^2.$$

Supprimant les seconds membres des équations (1.1.3), on retrouve (1.1.2), équations qui possèdent deux qualités inappréciables:

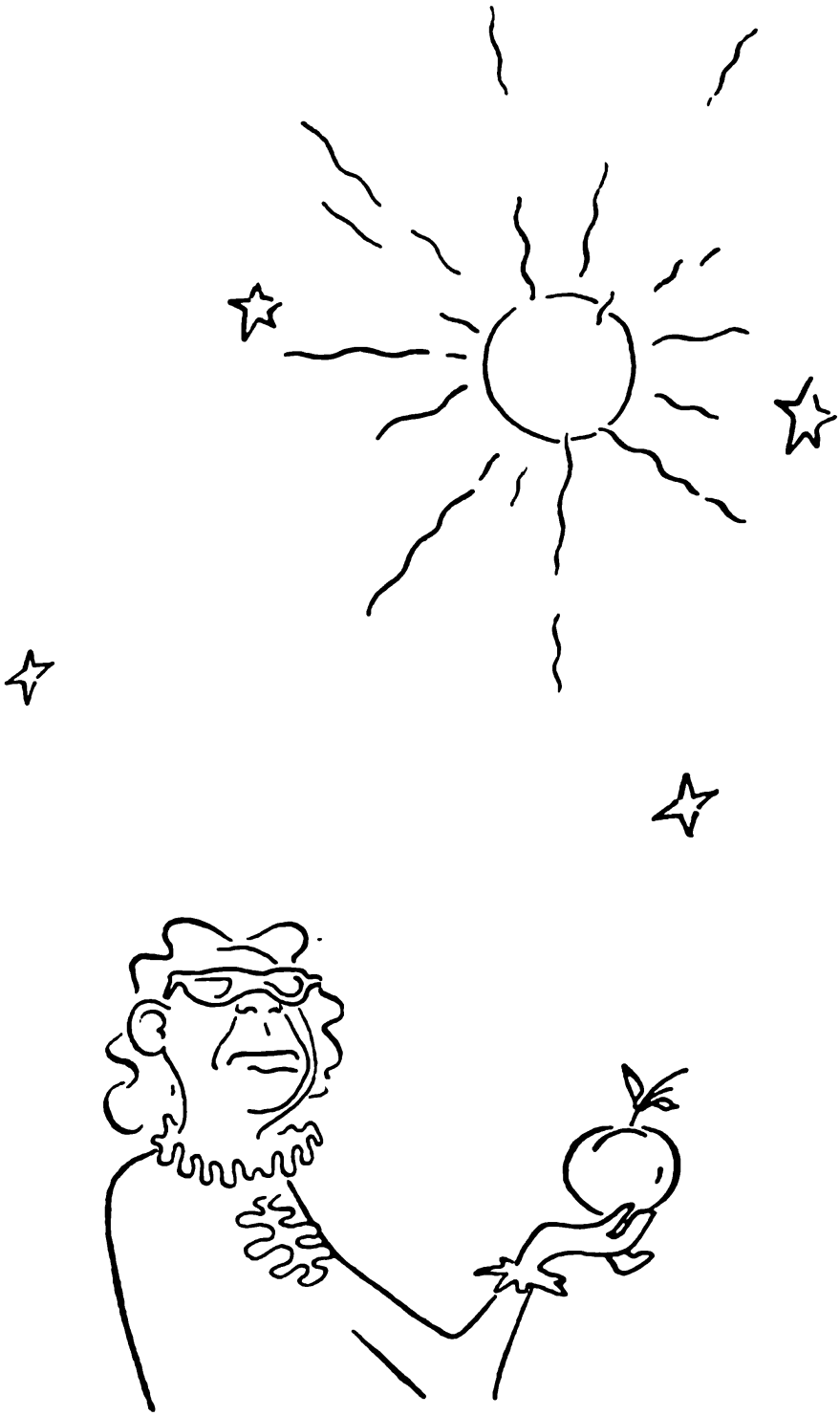
1° elles sont intégrables;

2° elles définissent après intégration un mouvement très simple (périodique).

Autrement dit, c'est l'architecture même du système solaire qui explique la simplicité relative du mouvement de chaque planète, ainsi que le fait que ce mouvement obéit à des équations différentielles intégrables. C'est cette même circonstance qui aura permis à l'humanité, dans un délai relativement court *), d'abord de cerner les lois de mouvement des planètes (Kepler) et ensuite d'expliquer ces lois (Newton).

Il faut dire que beaucoup d'étoiles de la Galaxie sont doubles ou triples, à la différence du Soleil. Supposant qu'un système d'étoile multiple possède des planètes à orbite stable (de telles orbites peuvent exister), une race d'êtres intelligents pourrait bien naître sur une planète de ce type [1.2]. Or, les êtres doués de la raison et habitant une planète dans un système d'étoile double seraient franchement déshérités par la nature en comparaison avec l'humanité de la planète Terre. En effet, dans un système d'étoile binaire, le mouvement d'une planète se définit par les équations (1.1.3) dans lesquelles les seconds membres cessent d'être négligeables: les deux étoiles exercent sur la planète une influence comparable. La trajectoire de la planète s'en trouve singulièrement compliquée; d'éventuels chercheurs auront mis un temps fou à expliquer son mouvement et n'arriveront probablement jamais à comprendre qu'il est régi par une loi toute simple (1.1.1) qui tient compte de l'attraction de la planète par chacune des étoiles. Comme quoi les Kepler et Newton de là-bas auront du pain

*) Les quelques milliers d'années d'existence de la civilisation humaine représentent moins de 1 % de la durée d'existence de l'espèce *Homo sapiens*.



sur la planche... On ne peut démontrer la loi (1.1.1) autrement qu'en montrant que la solution de (1.1.3) est absolument conforme aux données d'observation ; or, les équations (1.1.3) ne sont pas intégrables.

Pour une telle race intelligente hypothétique le chemin de la connaissance serait beaucoup plus pénible et lent que le nôtre (qu'on pense seulement aux épicycles de Ptolémée d'un système d'étoile multiple...). Et puisque la cadence de l'évolution d'une civilisation est fonction du volume des connaissances acquises, l'auteur risque d'avancer le postulat suivant :

L'évolution de la civilisation dans les systèmes d'étoiles multiples (toutes choses étant égales d'ailleurs *)), est moins rapide que dans les systèmes d'étoiles simples.

Comme quoi on a encore de la chance...

2. Le mouvement képlérien

La masse d'une planète est négligeable par rapport à celle du Soleil, de même que la masse d'un satellite artificiel par rapport à la Terre. On peut donc admettre que le centre de masse du système se confond avec celui du corps plus massif. Par la suite, toutes les fois que le contraire n'est pas spécifié, on entendra par corps central la Terre et par corps de masse négligeable son satellite artificiel.

La force d'attraction newtonienne exercée sur le satellite est caractérisée par l'accélération

$$\mathbf{f}_N = -\frac{\mu}{r^2}\mathbf{e}_r \tag{1.2.1}$$

dirigée vers le centre de la Terre. Dans cette formule $\mathbf{e}_r$ est le vecteur unité dirigé du centre de la Terre vers le satellite que l'on considère comme un point matériel. A cette accélération correspond la *fonction de forces* du champ de forces centrales newtonien

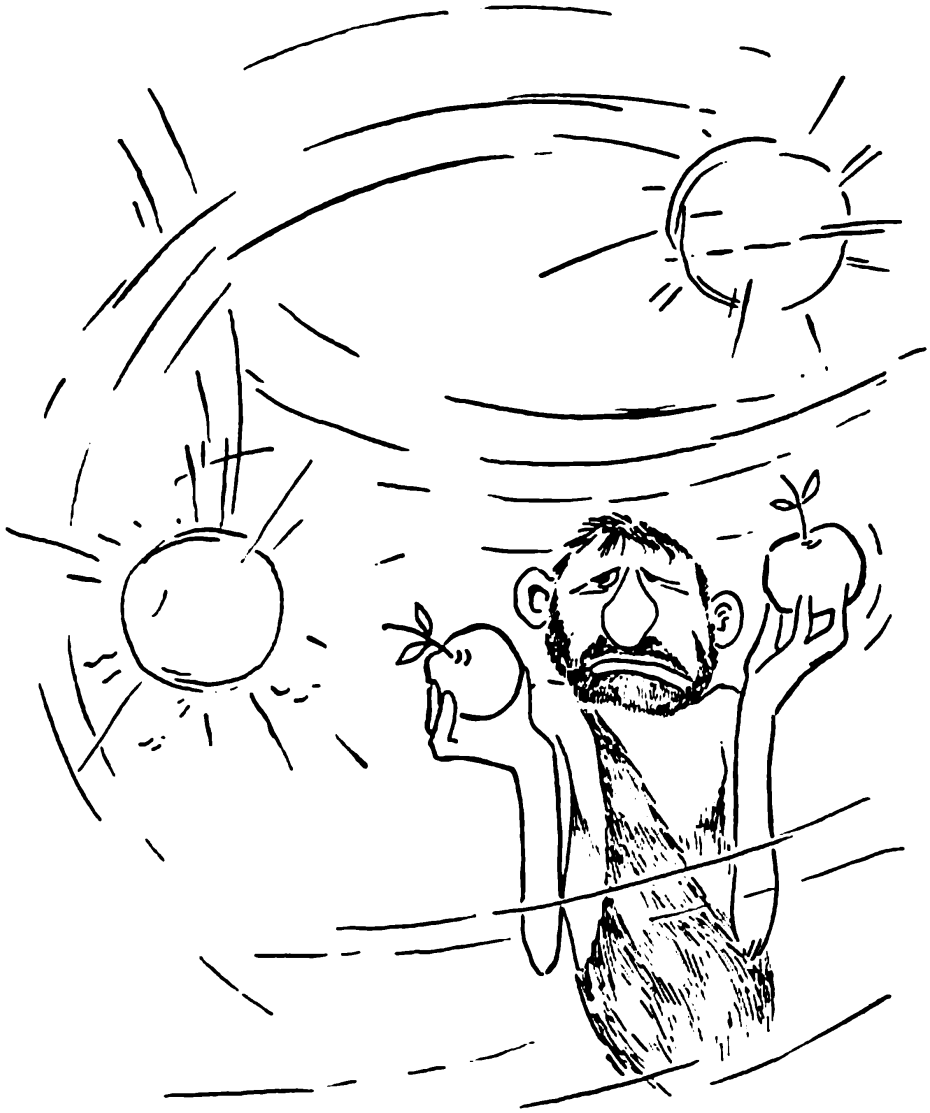
$$U = \mu/r, \tag{1.2.2}$$

si bien que, dans un système de coordonnées fixe dont l'origine est au centre de la Terre, l'accélération se décompose en

$$f_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad f_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad f_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{1.2.3}$$

et les équations du mouvement (1.1.2) deviennent intégrables. Si une orbite vérifie ces équations, on dit que cette orbite est *képlérienne*.

*) L'auteur ne voit pas d'inconvénient à ce que la connaissance emprunte quelque part une voie plus rapide, sans passer par les équations différentielles dont on connaît trop bien les déficiences. Si l'on y ajoute que certaines civilisations n'ont absolument rien de commun et ne peuvent de ce fait être comparées, on comprendra le sens de la remarque.



Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait même que les équations (1.1.2) sont intégrables, et non sur les modalités de l'intégration qui sont décrites dans tous les cours de mécanique rationnelle et céleste (voir par exemple [1.1], [1.3]); on n'a donc aucun besoin de revenir là-dessus. A la suite de l'intégration, on s'assure toujours que le satellite parcourt une orbite elliptique, parabolique ou hyperbolique dont un foyer se confond avec le centre de la Terre.

Ce sont les orbites elliptiques qui nous intéressent tout particulièrement. On en voit une sur la figure 1.1. En coordonnées polaires r, ν l'ellipse a pour équation

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \qquad (1.2.4)$$

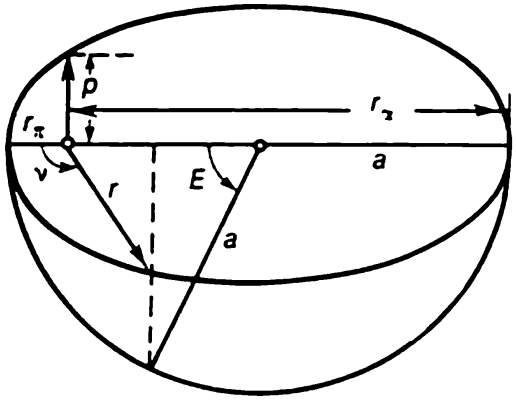


Fig. 1.1. Orbite elliptique képlérienne

où l'angle ν est compté à partir de la direction r_π issue du centre de la Terre et allant vers le point le plus proche de l'orbite, ou *périgée*. La distance entre le satellite et la Terre atteint son maximum r_α au point de l'orbite appelé *apogée*, lorsque $\nu = 180°$. L'équation (1.2.4) contient deux constantes p et e. La quantité p s'appelle *demi-paramètre focal* de l'orbite; sa signification géométrique ressort clairement sur la figure 1.1: elle caractérise les dimensions de l'orbite. Quant à la quantité e, c'est l'*excentricité* de l'orbite; elle caractérise son aplatissement plus ou moins grand. Si $e = 0$, l'orbite est circulaire; pour $e \to 1$ sa forme tend vers une parabole. Les quantités p et e se laissent exprimer en fonction de la distance à l'apogée r_α et au périgée r_π:

$$p = \frac{2 r_\alpha r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}, \quad e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}. \qquad (1.2.5)$$

La plus grande dimension de l'ellipse est caractérisée par la quantité a appelée *demi-grand axe*:

$$a = \frac{r_\alpha + r_\pi}{2}. \qquad (1.2.6)$$

Les quantités p, e, a vérifient la relation

$$p = a\,(1 - e^2). \qquad (1.2.7)$$

L'angle ν intervenant dans (1.2.4) s'appelle *anomalie vraie*. C'est sa variation en fonction du temps, $\nu\,(t)$, qui définit la loi du mouvement du satellite en orbite. En théorie des orbites képlériennes le plus difficile est d'exprimer ν sous forme explicite en fonction du temps t.

La vitesse angulaire $d\nu/dt$ du satellite en orbite est régie par une loi appelée *intégrale des aires*:

$$r^2 \frac{d\nu}{dt} = \sqrt{\mu p}. \tag{1.2.8}$$

Portons-y $r(\nu)$ tiré de (1.2.4) et calculons l'intégrale correspondante: nous obtenons une expression explicite du temps t en fonction de ν, $t = t(\nu)$. Il s'agit de résoudre cette équation transcendante par rapport à ν. A cet effet, introduisons une nouvelle variable E, dite *anomalie excentrique* (voir fig. 1.1), et liée à ν par les relations

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \nu = \frac{\sin E}{1 - e \cos E} \sqrt{1 - e^2}, \tag{1.2.9}$$

avec

$$r = a(1 - e \cos E). \tag{1.2.10}$$

L'anomalie excentrique E est liée au temps t par l'*équation de Kepler*:

$$E - e \sin E = n(t - \tau^*) \tag{1.2.11}$$

dans laquelle $n = \sqrt{\mu/a^3}$ est le « *moyen mouvement* »; la constante τ^* marque l'*instant de passage au périgée de l'orbite*. De (1.2.11) on déduit sans peine que la période de révolution du satellite en orbite est

$$T = 2\pi \sqrt{a^3/\mu}. \tag{1.2.12}$$

Expliciter E sous la forme $E(t)$ dans l'équation de Kepler (1.2.11) revient à expliciter ν en fonction du temps sous la forme $\nu = \nu(t)$ dans (1.2.9), aussi bien que $r = r(t)$. Pour en savoir plus sur les méthodes et les résultats de la résolution de l'équation de Kepler, nous recommandons au lecteur le traité de G. Doubochine déjà évoqué [1.1].

Enfin, le module de la vitesse V du satellite en orbite vérifie la relation

$$V = \sqrt{\mu/p} \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}. \tag{1.2.13}$$

Les composantes radiale et transversale de la vitesse sont respectivement

$$V_r = \sqrt{\mu/p}\, e \sin \nu, \quad V_\tau = \sqrt{\mu/p}\,(1 + e \cos \nu), \tag{1.2.13'}$$

si bien que la vitesse présente son maximum au périgée ($\nu = 0$) et son minimum à l'apogée ($\nu = \pi$). Le mouvement se produisant dans un champ de forces conservatif (1.2.2), on a naturellement la *loi de la conservation de l'énergie* (ou l'*intégrale de la demi-force vive*)

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = h = \text{Cte}. \tag{1.2.14}$$

Portons-y (1.2.13) et (1.2.4). Compte tenu de (1.2.7), il vient

$$h = -\frac{\mu}{2a}. \tag{1.2.15}$$

Remarquons aussi qu'au lieu de l'intégrale des aires (1.2.8) on peut écrire l'intégrale vectorielle

$$\mathbf{r} \times \mathbf{V} = \mathbf{c} \tag{1.2.16}$$

dans laquelle **r** est le rayon vecteur et **V** le vecteur vitesse du satellite. Le vecteur

$$\mathbf{l} = -\frac{\mu}{r}\mathbf{r} + \mathbf{V} \times \mathbf{c}, \tag{1.2.17}$$

dit *vecteur de Laplace*, devient alors constant; autrement dit, **l** est intégrale des équations du mouvement. Porté par le demi-grand axe de l'orbite et orienté vers son périgée, le vecteur **l** est de module

$$|\mathbf{l}| = \mu e. \tag{1.2.18}$$

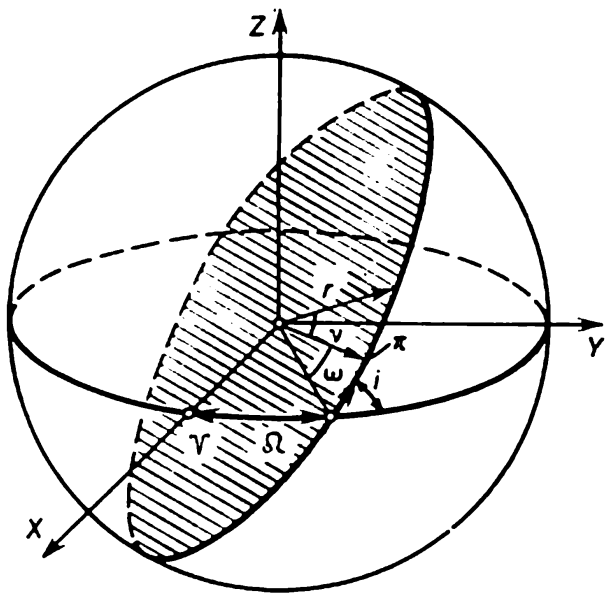


Fig. 1.2. Position de l'orbite dans l'espace

Telles sont les principales lois du mouvement képlérien en orbite elliptique. Or, nous avons étudié ce mouvement dans le plan de l'orbite; pour définir complètement le mouvement dans l'espace, on doit connaître la position de l'orbite elle-même dans l'espace. A cet effet, projetons le plan de l'orbite sur la sphère céleste et introduisons un système de coordonnées XYZ (fig. 1.2) de telle façon que l'axe Z soit dirigé vers le pôle Nord céleste (c'est un point bien déterminé de la sphère céleste, voisin de l'étoile Polaire), l'axe X vers le point vernal (un autre point déterminé de la sphère, situé de nos jours dans la constellation des Poissons), que l'origine des coordonnées soit au centre de la Terre et le plan XY confondu avec le plan de l'équateur terrestre. La ligne d'intersection des plans de l'orbite et de l'équateur s'appelle *ligne des nœuds* et les traces de cette ligne sur la sphère céleste, les *nœuds* de l'orbite. Le *nœud ascendant* de l'orbite est le point de la sphère céleste en lequel le satellite traverse l'équateur en passant de l'hémisphère austral à l'hémisphère boréal; le nœud

opposé est dit *descendant*. La position du plan de l'orbite est complètement définie par deux angles constants:

— l'angle entre les directions du point vernal et du nœud ascendant: il s'appelle *longitude du nœud ascendant* et se note Ω;

— l'angle entre le plan équatorial et le plan de l'orbite: il s'appelle *inclinaison* de l'orbite et se note i.

Le périgée π de l'orbite se trouve à une distance angulaire constante ω de la ligne des nœuds. L'angle ω, appelé *longitude du périgée*, est mesuré dans le plan de l'orbite entre la ligne des nœuds et la direction du périgée de l'orbite.

Au lieu de l'anomalie vraie ν, on utilise souvent un autre angle polaire variable $u = \omega + \nu$, dit *argument de la latitude*. Il est mesuré dans le plan de l'orbite entre la ligne des nœuds et le rayon vecteur courant de l'orbite.

Faisons le point. L'orbite d'un satellite est caractérisée par deux paramètres constants indépendants p (ou a) et e; la position de cette orbite dans l'espace se définit par trois angles indépendants Ω, ω, i; la position du satellite sur son orbite se définit à chaque instant donné par le paramètre τ^*. On a donc au total six paramètres constants indépendants qui déterminent complètement la position du satellite dans l'espace (ses coordonnées et sa vitesse à l'instant donné), par exemple:

$$a,\ e,\ \Omega,\ \omega,\ i,\ \tau^*. \tag{1.2.19}$$

Les paramètres (1.2.19) sont appelés *éléments de l'orbite* du satellite *).

Remarquons maintenant que le système de départ (1.1.2) est un système d'équations différentielles du sixième ordre (il réunit trois équations du second ordre); sa solution doit donc contenir six constantes d'intégration arbitraires. Chaque fois que les valeurs de ces constantes se trouvent définies à l'aide de conditions initiales ou de conditions aux limites, on a un mouvement bien déterminé. Les éléments (1.2.19) sont précisément les constantes en question: ils sont au nombre de six et ils sont indépendants. Les données initiales associent des valeurs numériques concrètes aux éléments et définissent un mouvement concret.

3. Mouvement perturbé. Eléments osculateurs

Le mouvement képlérien étudié dans le n° précédent (et vérifiant les équations (1.1.2)) est aussi appelé *mouvement non perturbé* du satellite. Or, en réalité, le vrai mouvement d'un satellite est toujours décrit par des équations analogues à (1.1.3) car, en plus de la force

*) Les éléments de l'orbite ne se définissent pas toujours de la même façon. Par exemple, la position du plan de l'orbite peut être rattachée au plan de l'écliptique et non au plan de l'équateur; au lieu de e et de ω, on prend deux combinaisons indépendantes de e et ω, et ainsi de suite.

d'attraction newtonienne produisant l'accélération (1.2.3.), le satellite éprouve l'action d'une multitude d'autres forces: la résistance de l'atmosphère, l'écart de l'attraction de la Terre par rapport à sa valeur théorique conforme aux formules de Newton, les attractions de la Lune et du Soleil, et ainsi de suite. Toutes les forces énumérées (et beaucoup d'autres) sont en général petites devant celle de l'attraction newtonienne, si bien que la condition

$$\sqrt{f_x^2+f_y^2+f_z^2} \ll \frac{\mu}{r^2}$$

a lieu. La prise en compte de ces forces n'ajouterait donc que des termes très petits aux équations du mouvement, à savoir: les composantes f_x, f_y, f_z intervenant dans les seconds membres des équations (1.1.3).

Si le satellite est soumis dans son mouvement à l'action simultanée de la force d'attraction newtonienne (vers le centre de la Terre) et des forces additionnelles, on dit que son mouvement est *perturbé*; il obéit aux équations (1.1.3). Quant à la forme concrète des composantes f_x, f_y, f_z de l'accélération perturbatrice, elle dépend de la nature des perturbations prises en compte: le frottement atmosphérique, ou les perturbations gravitationnelles, ou la pression de radiation, ou encore la totalité de ces facteurs. Tout dépend du problème à résoudre.

Les équations (1.1.3) étant non intégrables, on se demande comment étudier le mouvement perturbé. Le raisonnement suivant aide à résoudre ce problème. Puisque les perturbations sont faibles devant l'attraction newtonienne, il est logique de supposer que le mouvement perturbé ne l'est pas excessivement, c'est-à-dire qu'il reste assez proche d'un mouvement képlérien. La solution des équations (1.1.3) doit donc être analogue à celle de (1.1.2). En effet, supposons que le mouvement perturbé se produit suivant une orbite « elliptique » à éléments (1.2.19) mais que ces derniers varient dans le temps:

$$a(t),\ e(t),\ \Omega(t),\ \omega(t),\ i(t),\ \tau^*(t). \qquad (1.3.1)$$

Il ne reste alors qu'à mettre en évidence leurs variations en fonction du temps (compte tenu des équations du mouvement perturbé (1.1.3)).

Une « ellipse » à éléments (1.3.1) s'appelle *ellipse osculatrice*, et ses éléments variables, *éléments osculateurs* *). Ce terme traduit la proximité étroite (« intime », comme disait N. Moïsséev **))

*) Cette appellation, provenant du latin *osculari*, « baiser », est due à Lagrange.

**) Le professeur Nikolaï Moïsséev (1902-1955) est le fondateur de l'école moscovite de mécanique céleste. Ses nombreuses recherches et ses talents pédagogiques ont profondément marqué les esprits de la génération actuelle des spécialistes de mécanique céleste.

des orbites perturbée et non perturbée. Si l'on figeait les valeurs des paramètres en un instant arbitraire t^*, le mouvement deviendrait aussitôt purement képlérien (elliptique) tout en restant, dans un voisinage de t^*, très proche du mouvement qui aurait eu lieu si les paramètres (1.3.1) continuaient à varier (dans ce même voisinage de t^*).

Pour établir les équations différentielles en éléments osculateurs (1.3.1), on doit passer des variables $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ aux variables (1.3.1), les porter dans (1.1.3) et résoudre ces dernières équations par rapport aux dérivées dp/dt, de/dt, $d\Omega/dt$, $d\omega/dt$, di/dt, $d\tau^*/dt$ des éléments osculateurs. On voit facilement que la méthode des éléments osculateurs se réduit à la méthode de variation des constantes arbitraires du mouvement non perturbé conformément aux équations du mouvement perturbé. Voici la règle fondamentale du mouvement osculateur : les coordonnées x, y, z et les composantes $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ de la vitesse se définissent de la même façon en fonction des éléments, que ce soit dans le mouvement perturbé ou non, à ceci près que, répétons-le, les éléments restent constants en mouvement non perturbé mais varient dans le temps en mouvement perturbé.

4. Orbite osculatrice du satellite équatorial

Considérons un exemple élémentaire qui permet de comprendre les particularités du mouvement perturbé.

Soit un satellite de la Terre qui se meut dans son plan équatorial [1.16, 1.17]. On sait que la Terre est un peu aplatie vers l'équateur, ce qui fait que la force exercée sur le satellite diffère légèrement de la force newtonienne. Or, tant que le satellite reste dans le plan de l'équateur, la force en question reste centrale (dirigée en permanence vers le centre de la Terre). L'accélération centrale conférée au satellite s'écrit sous la forme:

$$f = -\frac{\mu}{r^2} - \varepsilon \frac{\mu R_0^2}{r^4}. \tag{1.4.1}$$

Le premier terme est l'accélération centrale newtonienne pure et le second, l'accélération perturbatrice provenant de l'aplatissement de la Terre ; r est la distance du satellite au centre de la Terre; R_0, le rayon équatorial de la Terre ; ε, une constante sans dimension qui tient compte de l'aplatissement. On a pour la Terre $\varepsilon = 0{,}0016$. A l'accélération $f(r)$ correspond la fonction de forces

$$U = \int f(r)\, dr = \frac{\mu}{r} + \varepsilon \frac{\mu R_0^2}{3r^3}.$$

Puisque le mouvement relève de la fonction de forces $U(r)$ qui ne dépend pas explicitement du temps, l'énergie totale du mouvement

est conservée (voir un cours de mécanique) :

$$\frac{1}{2}V^2 - \frac{\mu}{r} - \varepsilon\frac{\mu R_0^2}{3r^3} = H_0. \tag{1.4.2}$$

Par ailleurs, puisque la force est centrale, des équations du mouvement admettent encore une intégrale première, à savoir l'intégrale des aires (qui a lieu chaque fois que la force est centrale) :

$$r^2\frac{d\varphi}{dt} = c. \tag{1.4.3}$$

Ici φ est l'angle polaire dans le système de coordonnées polaires r, φ.

Ecrivons maintenant les équations en termes d'éléments osculateurs pour notre problème. Si le mouvement est non perturbé, l'intégrale des aires se présente sous la forme (1.2.8). Quel que soit le mouvement, le premier membre de l'intégrale des aires peut s'écrire rV_τ, où V_τ est la projection transversale de la vitesse du satellite. Or, d'après la règle fondamentale du mouvement osculateur, les coordonnées (r) et les vitesses (V_τ) doivent se définir en fonction des éléments de la même façon dans le mouvement perturbé et non perturbé. De ce fait, la constante c de l'intégrale des aires (1.4.3) du mouvement perturbé envisagé s'écrira comme le second membre de (1.2.8). On a donc $c = \sqrt{\mu p}$, d'où p = Cte ou, si l'on veut,

$$\frac{dp}{dt} = 0. \tag{1.4.4}$$

Ceci est la première des équations écrites en éléments osculateurs pour le mouvement étudié. Le demi-paramètre focal de l'orbite osculatrice reste inchangé.

Ensuite, compte tenu de (1.2.14), (1.2.15) et (1.2.7), écrivons l'intégrale de la demi-force vive (1.4.2) du mouvement perturbé :

$$\frac{\mu(e^2-1)}{2p} - \frac{\varepsilon\mu R_0^2}{3r^3} = H_0. \tag{1.4.2'}$$

Dérivons par rapport au temps. Il vient

$$e\frac{de}{dt} = -\varepsilon\frac{pR_0^2}{r^4}\dot{r}.$$

Or, toujours en vertu de la règle fondamentale du mouvement osculateur, l'expression de la vitesse radiale $\dot{r} = V_r$ doit être de la même forme (1.2.13') qu'en mouvement non perturbé, la dernière équation devenant alors définitivement

$$\frac{de}{dt} = -\varepsilon\frac{\sqrt{p\mu}\,R_0^2}{r^4}\sin\nu. \tag{1.4.5}$$

Il va de soi que r est conforme à (1.2.4).

Reprenons l'intégrale des aires (1.4.3). Remarquons que $\varphi = \nu + \omega$, d'où il ressort qu'on peut mettre l'intégrale des aires sous la forme

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{d\nu}{dt} \tag{1.4.6}$$

Pour écrire l'équation différentielle pour le troisième élément osculateur ω, on doit donc connaître l'expression de $d\nu/dt$ en mouvement perturbé.

Tirant de (1.2.13') l'expression de la vitesse radiale, mettons-la sous la forme

$$e \sin \nu = \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_r$$

et dérivons-la par rapport au temps, compte tenu du fait qu'en mouvement osculateur on a $p = \text{Cte}$. Il vient

$$\frac{de}{dt} \sin \nu + \frac{d\nu}{dt} e \cos \nu = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \dot{V}_r.$$

Or, on apprend en cinématique que $\dot{V}_r = \ddot{r} = (f_r + r\dot{\varphi}^2)$, où f_r est l'accélération radiale totale. Elle est définie par (1.4.1). A l'aide de l'intégrale des aires (1.4.3) exprimons $\dot{\varphi}$ en fonction de r et portons-la dans $\dot{V}_r$:

$$\dot{V}_r \sqrt{\frac{p}{\mu}} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r^2}\left(\frac{p}{r} - 1\right) - \frac{\varepsilon \sqrt{p\mu} R_0^2}{r^4}.$$

Puisque $p/r - 1 = e \cos \nu$, on obtient définitivement en appliquant l'expression explicite (1.4.5) de de/dt:

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} - \frac{\varepsilon \sqrt{\mu p} R_0^2}{e r^4} \cos \nu. \tag{1.4.7}$$

On tire alors aussitôt de (1.4.6) que

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\varepsilon}{e} \frac{\sqrt{\mu p} R_0^2}{r^4} \cos \nu, \tag{1.4.8}$$

si bien que le système d'équations différentielles (1.4.4), (1.4.5), (1.4.7), (1.4.8) est fermé par rapport à p, e, ω, ν. En toute rigueur, il faudrait y ajouter l'équation pour τ^* ; or, cela n'est pas obligatoire, car les équations énumérées suffisent pleinement à analyser le mouvement.

Remarquons tout d'abord que si l'aplatissement de la Terre était nul, $\varepsilon = 0$, on aurait aussitôt non seulement $p = p_0$ mais aussi $e = e_0$ et $\omega = \omega_0$, comme il se doit en mouvement képlérien. Or, pour $\varepsilon \neq 0$, l'excentricité e et la longitude du périgée ω sont des

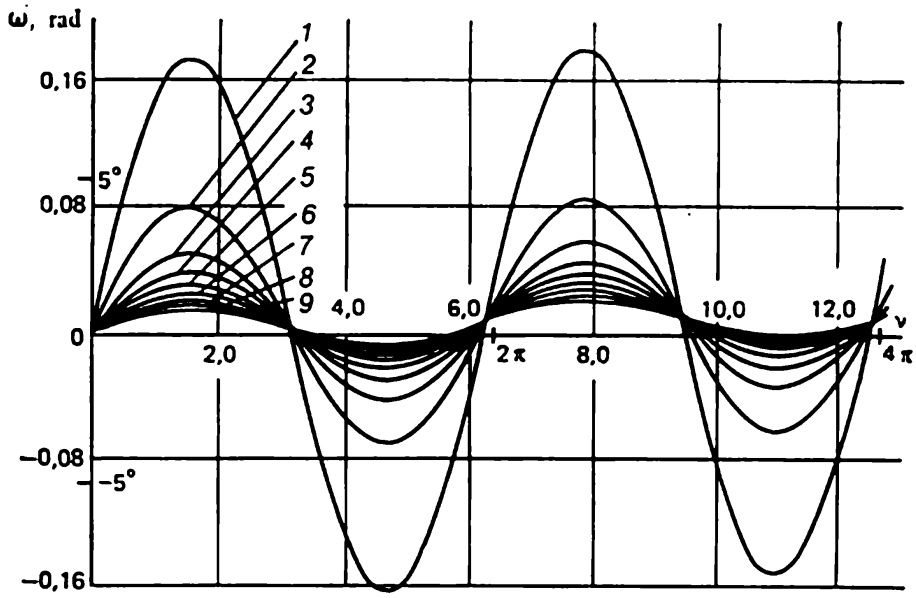


Fig. 1.3. Courbes de variation de la longitude osculatrice du périgée pour différentes valeurs initiales de l'excentricité: *1*, $e_0 = 0{,}01$; *2*, $e_0 = 0{,}02$; . . .; *9*, $e_0 = 0{,}09$

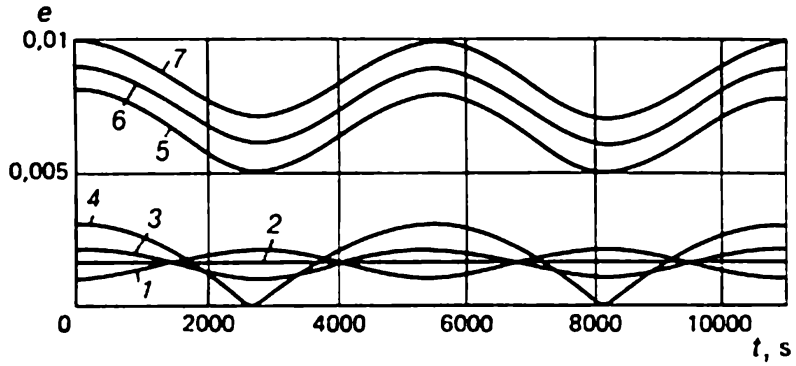


Fig. 1.4. Courbes de variation de l'excentricité osculatrice pour ses différentes valeurs initiales: *1*, $e_0 = 0{,}001$; *2*, $e_0 = 0{,}0016$; *3*, $e_0 = 0{,}002$; *4*, $e_0 = 0{,}003$; *5*, $e_0 = 0{,}008$; *6*, $e_0 = 0{,}009$; *7*, $e_0 = 0{,}01$

fonctions du temps, ce qui fait précisément la différence entre le mouvement perturbé et le mouvement non perturbé.

Les courbes des figures 1.3 et 1.4 expriment respectivement ω (ν) et e (t) pour différentes données initiales en mouvement osculateur. Ces fonctions ont été obtenues par intégration numérique de (1.4.4), (1.4.5), (1.4.7), (1.4.8). Nous remarquons que l'excentricité de l'orbite, tout en variant quelque peu dans le temps d'une façon périodique, ne présente cependant pas de changements systématiques (dits *séculaires*) qui pourraient à la longue faire dévier l'excentricité de sa valeur initiale. Pour estimer l'amplitude des variations de l'excentricité, on peut mettre l'intégrale de la demi-force vive (1.4.2)

sous la forme

$$\frac{3}{2}(e^2-e_0^2)=\varepsilon\frac{R_0^2}{p^2}[(1+e\cos\nu)^3-(1+e_0)^3].$$

D'où il ressort qu'au périgée osculateur ($\nu=0$) on a $e=e_{max}=e_0$. A l'apogée osculateur ($\nu=\pi$) la résolution approximative de l'équation cubique en e nous donne, à la puissance première de ε près,

$$e=e_{min}\approx e_0-2\varepsilon\left(\frac{R_0}{p}\right)^2,$$

pourvu que $e_0>2\varepsilon\left(\frac{R_0}{p}\right)^2$.

Le fait que l'excentricité osculatrice soit plus petite à l'apogée qu'au périgée veut dire que l'orbite est moins incurvée à l'apogée qu'au périgée.

Passons aux courbes de $\omega(\nu)$ montrées sur la figure 1.3. Ici nous constatons, en plus des variations périodiques de la position du périgée, une dérive systématique, ou séculaire, qui augmente à chaque révolution du satellite. Rapportée à une révolution du satellite, la dérive séculaire s'écrit

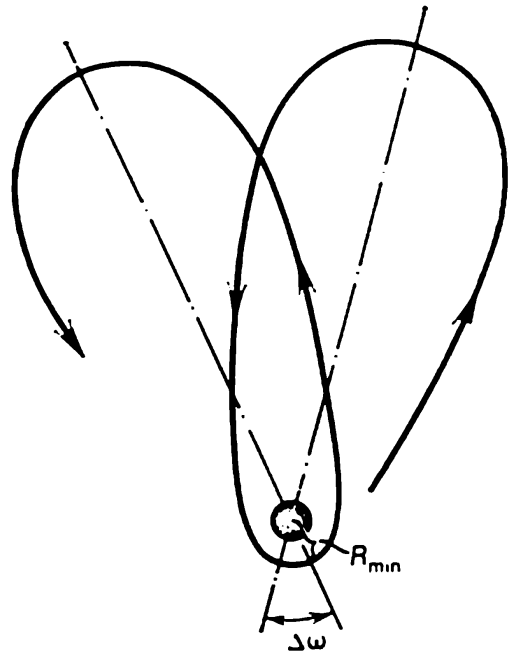


Fig. 1.5. Schéma simplifié de l'évolution de l'orbite d'un satellite équatorial de la Terre

$$\Delta=\int_0^{2\pi}\frac{d\omega}{dt}\cdot\frac{dt}{d\nu}\,d\nu=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon\frac{R^2}{p^2}(1+e\cos\nu)^2\cos\nu\,d\nu}{e-\varepsilon\frac{R^2}{p^2}(1+e\cos\nu)^2\cos\nu}$$

Si $e_0>2\varepsilon\left(\frac{R}{p}\right)^2$, cette intégrale se laisse calculer approximativement, à la première puissance de ε près. Posant $e\approx e_0$, on obtient

$$\Delta\omega=2\pi\varepsilon\left(\frac{R_0}{p}\right)^2. \tag{1.4.9}$$

On peut donc représenter l'orbite du satellite comme une figure ovale de taille constante ($p=$ Cte), légèrement « pointue » au périgée et un peu « aplatie » à l'apogée, qui tourne d'un angle $\Delta\omega$ (1.4.9) dans son plan quand le satellite fait une révolution complète. L'orbite d'un satellite équatorial est schématisée sur la figure 1.5.

Si $e \sim \varepsilon$ ou $e \ll \varepsilon$, la nature de la trajectoire ne change pas; par contre, le comportement des éléments osculateurs change foncièrement, si bien que l'orbite osculatrice risque d'être singulièrement différente de l'orbite réelle.

Voici un exemple frappant. Parmi les orbites d'un satellite équatorial, il y a une orbite strictement circulaire sur laquelle le satellite se meut avec une vitesse constante. Cette orbite reste-t-elle circulaire si on la définit en termes d'éléments osculateurs?

Il se trouve que non. En effet, à une orbite circulaire réelle de rayon r_0 correspond la solution exacte suivante des équations (1.4.4), (1.4.5), (1.4.7), (1.4.8):

$$\nu = 0, \qquad e = e^* = \varepsilon \left(\frac{R_0}{r_0}\right)^2$$

$$p = r_0 \left(1 + \varepsilon \frac{R_0^2}{r_0^2}\right), \qquad \omega = \frac{\sqrt{\mu p_0}}{r_0^2} (t - t_0) + \omega_0.$$

Ainsi donc, transposée en éléments osculateurs, l'orbite circulaire devient une ellipse animée de rotation avec une vitesse angulaire $\dot{\omega} = \sqrt{\mu p_0}/r_0^2$, le satellite se trouvant en permanence au périgée ($\nu \equiv 0$). Nous voyons que pour une perturbation aussi petite que l'on veut ($\varepsilon \neq 0$), il peut y avoir en mouvement perturbé $d\nu/dt \equiv \equiv 0$, ce qui n'arrive jamais en mouvement non perturbé.

Nous avons terminé l'analyse du mouvement osculateur d'un satellite équatorial de la Terre. Les propriétés fondamentales du mouvement osculateur que nous avons dégagées sont les suivantes:

— l'ellipse osculatrice traduit généralement (mais pas toujours), de façon qualitative, les propriétés du mouvement réel;

— les perturbations des éléments osculateurs peuvent être périodiques et séculaires.

L'importance principale doit être attachée aux perturbations séculaires, car ce sont elles qui caractérisent l'évolution à long terme du mouvement.

5. Equations en éléments osculateurs. Eléments de Delaunay

Tout ce qui été dit en fin du n° 4 reste vrai dans les cas plus compliqués, lorsque le mouvement est soumis à des perturbations arbitraires (mais toujours petites) et se produit en trois dimensions. Il va sans dire que les équations en éléments osculateurs deviennent plus compliquées dans le cas général. Le lecteur qui désire en savoir davantage sur la déduction de ces équations consultera avec profit des cours de mécanique céleste, par exemple le cours [1.1] de G. Doubochine. Une méthode de déduction rapide et fort élégante a été proposée par A. Lourié dans [1.4].

Sans les exposer *in extenso*, nous citerons à titre de référence toutes les équations en éléments osculateurs (pour les détails, voir les travaux cités):

$$\left.\begin{aligned}
&1.\ \frac{dp}{dt}=2r\tilde{T},\\
&2.\ \frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin\nu+\left[\cos\nu+(e+\cos\nu)\frac{r}{p}\right]\tilde{T},\\
&3.\ \frac{d\omega}{dt}=-\frac{\cos\nu}{e}\tilde{S}+\frac{\sin\nu}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}-\frac{r}{p}\sin u\operatorname{cotg} i\tilde{W},\\
&4.\ \frac{di}{dt}=\frac{r}{p}\cos u\tilde{W},\\
&5.\ \frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin i}\tilde{W},\\
&6.\ \frac{d\tau^*}{dt}=\frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[(eN\sin\nu-\cos\nu)\tilde{S}+\frac{p}{r}N\tilde{T}\right]\frac{r^2}{p^2}.
\end{aligned}\right\}\quad(1.5.1)$$

Ici

$$N=2\frac{p^2}{r^2}\int_0^{\nu}\frac{\cos\nu\,d\nu}{(1+e\cos\nu)^3},\qquad u=\nu+\omega.$$

Au lieu de l'équation pour le demi-paramètre focal p, on peut utiliser l'équation pour le demi-grand axe a:

$$\frac{da}{dt}=\frac{2a^2e\sin\nu}{p}\tilde{S}+\frac{2a^2}{r}\tilde{T},\qquad(1.5.2)$$

auquel cas on exprimera p en fonction de a et de e dans les seconds membres des équations conformément à (1.2.7). Ici

$$\tilde{S}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}S,\quad \tilde{T}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}T,\quad \tilde{W}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}W,$$

où S, T, W sont respectivement l'accélération radiale, transversale et normale intervenant dans les perturbations (fig. 1.6). Au lieu de r, on sous-entend (1.2.4). On suppose que S, T et W sont exprimées explicitement en fonction des éléments osculateurs et du temps. On constate souvent que S, T, W ne dépendent pas du temps explicitement mais par l'entremise de l'anomalie vraie ν ou de l'argument de la latitude u qui interviennent explicitement dans S, T et W.

La loi des aires (1.2.8) ne joue pas en mouvement perturbé, remplacée par la formule

$$r^2\frac{d\nu}{dt}=\sqrt{\mu p}+\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\frac{\cos\nu}{e}S-\frac{\sin\nu}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)T\right].\qquad(1.5.3)$$

Ecrites en éléments osculateurs, les équations (1.5.1) ne sont guè-

re plus simples que les équations (1.1.3) écrites en termes de coordonnées. Les équations (1.1.3) sont même « plus belles » en coordonnées : elles sont symétriques et courtes. Si les équations (1.1.3) sont non intégrables, il en est de même pour les équations (1.5.1) écrites en éléments osculateurs. Or, les équations (1.5.1) ont l'avantage suivant : elles permettent de cerner immédiatement l'écart de la trajectoire perturbée par rapport à la trajectoire non perturbée. En effet, les seconds membres de ces équations contiennent les accélé-

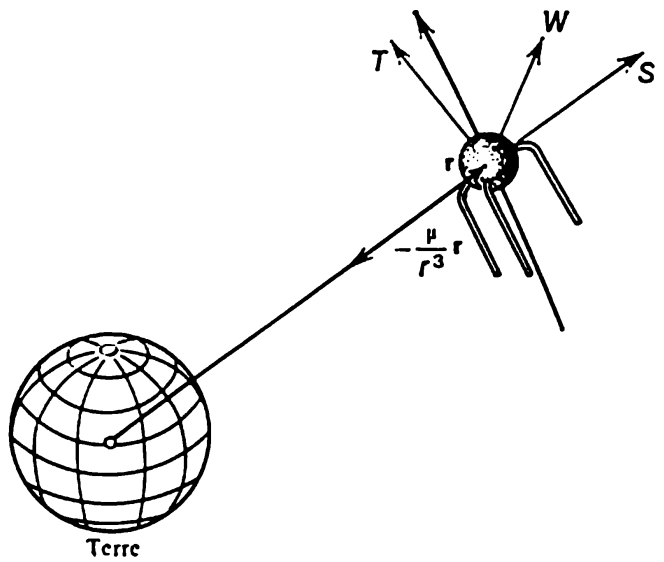


Fig 1.6 Les composantes de l'accélération perturbatrice

rations perturbatrices et s'annulent dès que les perturbations cessent d'agir : dans ce dernier cas les équations (1.5.1) donnent aussitôt la solution

$$p = \text{Cte}, \quad e = \text{Cte}, \quad \omega = \text{Cte}, \quad i = \text{Cte}, \quad \Omega = \text{Cte}, \quad \tau^* = \text{Cte},$$

c'est-à-dire la trajectoire képlérienne.

Même si les perturbations S, W, T ne sont pas nulles, elles restent généralement petites ; il est naturel de supposer alors que les éléments osculateurs diffèrent peu — dans un sens à préciser — de leurs valeurs initiales. Dans ce cas les équations (1.5.1) peuvent être traitées par une des méthodes bien connues de résolution approchée d'équations différentielles contenant un petit paramètre. Ces méthodes donnent en l'occurrence des résultats fort satisfaisants. Les problèmes du type indiqué sont particulièrement faciles à résoudre par les méthodes asymptotiques de la mécanique non linéaire. Nous en reparlerons plus tard. Elles permettent de substituer au problème non intégrable un autre problème dont l'intégration conduit à une solu-

tion qui approche de très près la solution inconnue du problème non intégrable de départ *).

En introduisant les éléments osculateurs, nous avions supposé que le mouvement perturbé diffère peu du mouvement non perturbé, car les accélérations perturbatrices sont faibles. Or, elles ont la faculté de s'accumuler avec le temps. Considéré dans un intervalle temporel bref, le mouvement perturbé reste proche du mouvement non perturbé, mais au bout d'un certain temps les petites perturbations

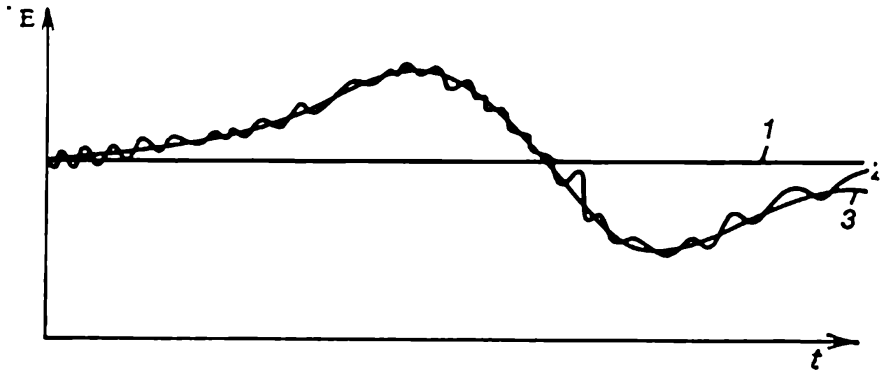


Fig. 1.7. Courbes de variation d'un élément osculateur dans le temps: *1*, mouvement non perturbé; *2*, mouvement perturbé; *3*, évolution du mouvement

accumulées risquent de déformer très sensiblement le mouvement initial. Si l'on fixe alors les valeurs courantes des éléments osculateurs, on obtient un mouvement képlérien comme précédemment mais son orbite elliptique sera nettement différente de l'ellipse de départ. Ce sont précisément les variations à long terme, ou l'*évolution* du mouvement, qui représentent l'objet principal de l'étude lors de l'analyse du mouvement perturbé. Les courbes de la figure 1.7, qui traduisent la variation d'un élément osculateur quelconque E dans le temps, illustrent les notions introduites.

Par les méthodes asymptotiques, on arrive à déduire des équations exactes en éléments osculateurs (1.5.1) les équations approchées, susceptibles seulement de décrire l'évolution du mouvement (courbe *3* de la figure 1.7): une telle description reste suffisamment fidèle dans un intervalle temporel prolongé (mais en général fini). Il est important de noter que ces équations approchées, dites *équations d'évolution*, s'avèrent souvent intégrables et permettent d'analyser

*) Ces méthodes ont déjà été esquissées par les classiques de la mécanique céleste. Dans son célèbre traité [1.5] Henri Poincaré emploie très largement une méthode de cette nature pour l'analyse du mouvement. Notons que le développement ultérieur des méthodes asymptotiques, leur théorie rigoureuse et leur application massive à la théorie des oscillations sont dus à N. Krylov, N. Bogoliubov, Iou. Mitropolski, V. Volossov et à d'autres chercheurs soviétiques [1.6, 1.7, 1.8].

en détail le tableau quantitatif et qualitatif de l'évolution du mouvement. Au besoin, on peut approcher le mouvement perturbé de plus près, jusqu'à cerner les plus petites variations de la courbe *2* de la figure 1.7.

En mécanique céleste et en mécanique du vol spatial, on a quelquefois intérêt à remplacer les éléments osculateurs classiques par telle ou telle combinaison de ces éléments. Si les forces perturbatrices relèvent d'une fonction de forces U, on arrive à donner aux équations du mouvement perturbé une forme particulièrement symétrique en introduisant de nouveaux éléments, dits *éléments de Delaunay* :

$$L,\ G,\ H,\quad l,\ g,\ h. \tag{1.5.4}$$

Ils se définissent en fonction des éléments osculateurs (1.3.1) de la façon suivante :

$$\left.\begin{aligned} L &= \sqrt{\mu a}, & l &= n\,(t-\tau^*),\\ G &= \sqrt{\mu a\,(1-e^2)}, & g &= \omega,\\ H &= \sqrt{\mu a\,(1-e^2)}\cos i, & h &= \Omega. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.5}$$

On suppose que la fonction de forces U s'exprime explicitement par l'intermédiaire des éléments de Delaunay, et l'on introduit la fonction hamiltonienne

$$F = \frac{\mu}{2L^2} + U\,(L,\ G,\ H,\ l,\ g,\ h), \tag{1.5.6}$$

afin de mettre les équations sous forme canonique :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L},\\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G},\\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}. \end{aligned}\right\} \tag{1.5.7}$$

Ainsi écrites, les équations du mouvement perturbé se prêtent aisément aux méthodes asymptotiques, ce que nous verrons plus tard *).

Fait important. Si le mouvement est non perturbé, les éléments L, G, H, g, h restent constants ; en présence de faibles perturbations ils évoluent lentement : on dit que ce sont les *variables lentes*. Quant à l'élément l, il ne reste pas constant en mouvement non perturbé mais varie de façon linéaire dans le temps avec la vitesse $\dot{l} = n = \sqrt{\mu/a^3}$; cette vitesse de variation élevée est à peu près conservée en mouvement perturbé, sauf quelques modifications insignifiantes

*) Pour la déduction des équations en éléments de Delaunay, voir par exemple [1.1].

induites par les petites perturbations: on dit que l est la *variable rapide*. La séparation des variables en lentes et rapides est un trait particulier des problèmes qui se prêtent aisément à l'analyse asymptotique.

6. Parenthèse sur les méthodes asymptotiques de la mécanique non linéaire. Oscillations du satellite autour du centre de masse. Mise en moyenne des équations canoniques

Nous préférons commencer la description des méthodes asymptotiques par un exemple typique, plutôt que de donner tout de suite les algorithmes généraux. Considérons donc un problème particulier: les oscillations du satellite autour du centre de masse.

Le satellite dont le centre de masse se déplace sur l'orbite se trouve exposé au moment des forces gravitationnelles qui stabilise le satellite par rapport à son rayon vecteur. Nous examinerons cette situation en détail dans un essai spécial. En attendant, mettons en équation les oscillations planes du satellite en orbite elliptique [1.17, 1.18] afin d'illustrer l'application des méthodes asymptotiques à la théorie des oscillations:

$$(1+e\cos\nu)\,\delta''-2e\sin\nu\cdot\delta'+ + n^2\sin\delta=4e\sin\nu, \tag{1.6.1}$$

$$\delta=2\theta,\quad n^2=3\,\frac{A-C}{B}.$$

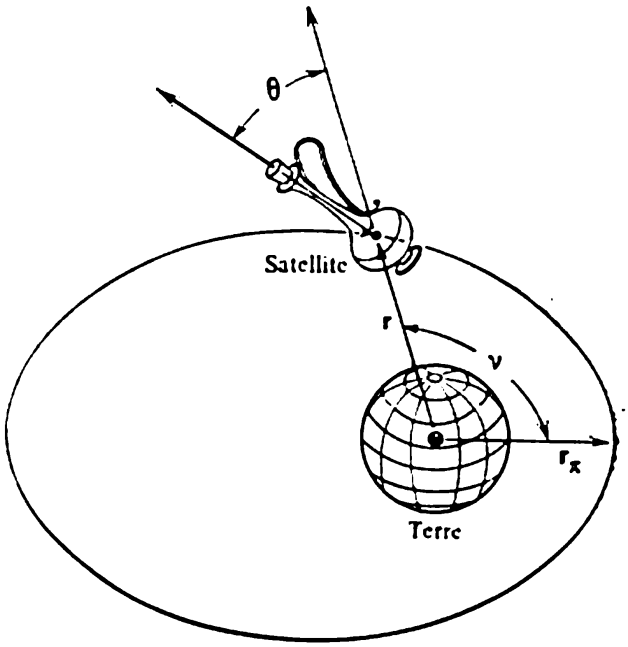


Fig. 1.8. Un satellite mis en orbite

Ici (fig. 1.8) ν est l'anomalie vraie, e l'excentricité de l'orbite, θ l'angle entre l'axe du satellite (contenu en permanence dans le plan de l'orbite) et son rayon vecteur courant; A, B, C, les moments d'inertie centraux principaux du satellite. Pour fixer les idées, posons $B > A > C$ et admettons que l'axe portant le moment d'inertie B soit normal au plan de l'orbite. Les apostrophes dans (1.6.1) symbolisent les dérivées par rapport à ν.

Si l'orbite était circulaire, $e = 0$, l'équation (1.6.1) admettrait la solution $\delta = 0$ correspondant à l'équilibre relatif du satellite:

l'axe du moment d'inertie C se confond en permanence avec le rayon vecteur du satellite. Si $e \neq 0$, il n'y a pas d'équilibre relatif: le satellite oscille autour de la direction du rayon vecteur. L'analyse de ces oscillations n'est pas facile, car l'équation (1.6.1) est non intégrable. On peut s'attendre toutefois à ce que, les valeurs de l'excentricité e restant faibles, il existe des oscillations de faible amplitude qui se laissent définir par une équation linéaire qu'on peut déduire de (1.6.1), quitte à poser $\sin\delta \approx \delta$. C'est par l'équation des petites oscillations que nous commencerons notre analyse.

Posant $\delta/2 \equiv \theta = z/(1 + e\cos\nu)$, nous obtenons une nouvelle équation

$$z'' + \left(\frac{n^2 + e\cos\nu}{1 + e\cos\nu}\right) z = 2e\sin\nu$$

qui, bien que linéaire, ne se laisse pourtant pas intégrer, car ses coefficients sont variables. L'excentricité e étant faible par hypothèse, on peut écrire la dernière équation, à la puissance première de e près, sous la forme

$$z'' + n^2 z = e\,[2\sin\nu + (n^2 - 1)\,z\cos\nu]. \tag{1.6.2}$$

Remarquons que pour $e = 0$ l'équation (1.6.2) a comme solution

$$z = a\cos\psi, \quad z' = -an\sin\psi \tag{1.6.3}$$

dans laquelle $\psi = n\nu + \psi_0$. Si l'on considère (1.6.3) comme un simple changement de variables (substitution de a, ψ à z et z') dans (1.6.2), cette équation peut être remplacée par un système équivalent

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{d\nu} &= -\frac{1}{n} f(\nu,\ a\cos\psi)\sin\psi, \\ \frac{d\psi}{d\nu} &= n - \frac{1}{na} f(\nu,\ a\cos\psi)\cos\psi, \\ \frac{d\nu}{d\nu} &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{1.6.4}$$

où

$$f(\nu, z) = e\,[2\sin\nu + (n^2 - 1)\,z\cos\nu].$$

Puisque f prend de faibles valeurs avec e, le système (1.6.4) contient une variable lente et deux variables rapides ψ, ν. Pour $e = 0$ on a $f = 0$, et le système (1.6.4) a comme solution

$$a = a_0, \quad \psi = n\nu + \psi_0;$$

en vertu de (1.6.3), cette solution définit les petites oscillations sur l'orbite circulaire.

Posons maintenant $e \neq 0$ et cherchons la solution de (1.6.4) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} a &= \bar{a} + e\alpha_1(\bar{\psi}, \bar{a}, \nu) + e^2\alpha_2(\bar{\psi}, \bar{a}, \nu) + \ldots, \\ \psi &= \bar{\psi} + e\beta_1(\bar{\psi}, \bar{a}, \nu) + e^2\beta_2(\bar{\psi}, \bar{a}, \nu) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.6.5}$$

Les fonctions $\bar{a}(\nu), \bar{\psi}(\nu), \alpha_i(\bar{\psi}, \bar{a}, \nu), \beta_i(\bar{\psi}, \bar{a}, \nu)$ sont inconnues. Ajoutons que les fonctions $\bar{a}$ et $\bar{\psi}$ doivent vérifier le système

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\bar{a}}{d\nu} &= e\tilde{A}_1(\bar{a}) + e^2\tilde{A}_2(\bar{a}) + \ldots, \\ \frac{d\bar{\psi}}{d\nu} &= n + e\tilde{B}_1(\bar{a}) + e^2\tilde{B}_2(\bar{a}) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.6.6}$$

dans lequel $\tilde{A}_i(\bar{a})$, $\tilde{B}_i(\bar{a})$ sont des fonctions (toujours inconnues) de la seule variable lente $\bar{a}$. La solution du système de départ (1.6.4) présentée sous la forme des développements (1.6.5), (1.6.6) suivant le petit paramètre e sera appelée *solution asymptotique*, ce qui veut dire que pour $e \to 0$ elle tend vers la solution exacte du système de départ, quitte à poser dans ce dernier $e = 0$ (on doit donc exiger que les fonctions inconnues α_i, β_i soient bornées). La solution asymptotique est d'autant plus exacte que les approximations réalisées sont nombreuses. On peut affirmer que si $\bar{a}_n$ est solution d'une n-ième approximation au sens asymptotique, alors $|a - \bar{a}_n| \sim e^n$ dans un intervalle de temps $t \sim 1/e$. Autrement dit, la méthode asymptotique fournit une solution exacte dans un intervalle temporel borné en général (mais parfois sur un intervalle infini).

Remarquons que l'équation différentielle de départ (1.6.2) a été écrite elle-même à la puissance première de e près : on peut donc supprimer dans (1.6.5) et (1.6.6) tous les termes d'ordre supérieur à 1 en e. Le sens du changement des variables (1.6.5), (1.6.6) est que (1.6.6) est beaucoup plus simple que le système de départ (1.6.4) (et intégrable par-dessus le marché dans notre cas) et que les fonctions α_i, β_i se calculent sans trop d'efforts. On obtient donc facilement une solution approchée du système dont on ignore la solution exacte.

Au lieu de la solution (1.6.5)-(1.6.6) de (1.6.4), nous pouvons chercher la solution d'un problème équivalent directement pour l'équation de départ (1.6.2). A la puissance première de e près, le problème en question s'énonce ainsi :

Chercher la solution de l'équation (1.6.2) sous la forme

$$z = a\cos\psi + eu_1(\psi, a, \nu), \tag{1.6.7}$$

où u_1 est bornée et a, ψ vérifient les équations

$$\frac{da}{d\nu} = eA_1(a), \quad \frac{d\psi}{d\nu} = n + eB_1(a), \tag{1.6.8}$$

dans lesquelles A_1, B_1 sont inconnues.

Portant (1.6.7) dans (1.6.2) compte tenu de (1.6.8) et gardant les seuls termes du premier ordre de petitesse, on obtient après transformation

$$\begin{aligned} &-2en(A_1 \sin\psi + B_1 a \cos\psi) + \\ &\quad + e\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi^2} n^2 + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial\psi\,\partial\nu} n + \frac{\partial^2 u_1}{\partial\nu^2}\right) + n^2 e u_1 = \\ &\quad = e\left\{2\sin\nu + \frac{a(n^2-1)}{2}[\cos(\nu+\psi) + \cos(\nu-\psi)]\right\}. \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Les deux membres de cette équation se divisent par e. Le second membre est exempt des harmoniques $\sin\psi$, $\cos\psi$, d'où $A_1 = 0$, $B_1 = 0$ et

$$a = a_0, \quad \frac{d\psi}{d\nu} = n. \tag{1.6.10}$$

Remarquons qu'on aboutit au même résultat *en faisant la moyenne des seconds membres du système* (1.6.4) *indépendamment suivant les phases rapides* ν, ψ. Ensuite, pour $A_1 = B_1 = 0$ l'équation aux dérivées partielles (1.6.9) admet comme solution

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{n^2-1}\sin\nu + \\ &+ \frac{1}{2}a(n^2-1)\left[\frac{1}{2n-1}\cos(\nu-\psi) - \frac{1}{2n+1}\cos(\nu+\psi)\right]. \end{aligned} \tag{1.6.11}$$

Les formules (1.6.10), (1.6.11) définissent complètement la solution cherchée (1.6.7) de (1.6.2). En première approximation les petites oscillations sur l'orbite elliptique sont sensiblement les mêmes que sur l'orbite circulaire, si bien qu'on peut se borner à prendre la solution approchée

$$z = a_0 \cos(n\psi + \psi_0).$$

Cette solution pourtant n'a plus de sens pour peu que la fréquence propre n et la fréquence « 1 » du mouvement orbital entrent en résonance : quand $n \to 1$, les oscillations augmentent indéfiniment comme le montre la formule (1.6.11). C'est la résonance. (Une autre résonance, dite *paramétrique*, se produit lorsque $n = 1/2$.) Or, en fonction même du problème envisagé les oscillations ne peuvent pas croître indéfiniment, car l'équation linéaire (1.6.2) définit seulement les petites oscillations. On est donc amené, au voisinage de la résonance, à étudier une équation non linéaire.

A cet effet, mettons l'équation de départ (1.6.1) sous la forme

$$\delta'' + n^2\delta = f(\nu, \delta, \delta', \delta''), \tag{1.6.12}$$

où

$$f = e\,[4 \sin \nu + 2\delta' \sin \nu - \delta'' \cos \nu] + n^2 (\delta - \sin \delta),$$

et supposons que f soit petite, ce qui revient à supposer aussitôt que l'excentricité e reste faible et que $\sin\delta$ ne diffère pas beaucoup de δ. De plus n^2 est voisin de 1 par définition (on opère au voisinage de la résonance). Pour $f = 0$ la solution est de la forme (1.6.3), où l'on doit poser en outre $n = 1$ pour tenir compte de la résonance. Cherchons donc la solution de (1.6.12), elle aussi, sous la forme

$$\delta = a \cos \psi, \quad \psi = \nu + \varkappa, \tag{1.6.13}$$

où a et $\varkappa$ sont de nouvelles variables. Comme dans le cas de non-résonance, l'équation (1.6.12) peut être remplacée par un système équivalent analogue à (1.6.4) mais écrit déjà sous la forme

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{d\nu} = -\frac{1}{n} f(\psi - \varkappa,\ a\cos\psi,\ -an\sin\psi,\ an^2\cos\psi)\sin\psi,\\
&\frac{d\varkappa}{d\nu} = n - 1 -\\
&\quad -\frac{1}{na} f(\psi - \varkappa,\ a\cos\psi,\ -an\sin\psi,\ an^2\cos\psi)\cos\psi,\\
&\frac{d\psi}{d\nu} = 1 + \frac{d\varkappa}{d\nu}.
\end{aligned}\right\} \tag{1.6.14}$$

Puisque f est petite et que n est voisin de l'unité, ce système contient déjà deux variables lentes a, $\varkappa$ et une variable rapide ψ. Entre (1.6.4) et (1.6.14) il n'y a pas de différence de principe, si bien qu'on peut chercher la solution de (1.6.14) sous une forme analogue à (1.6.5)-(1.6.6), de façon à obtenir en première approximation

$$\delta = a\cos\psi, \qquad \psi = \nu + \varkappa,$$
$$\frac{da}{d\nu} = A_1(a, \varkappa), \qquad \frac{d\varkappa}{d\nu} = n - 1 + B_1(a, \varkappa).$$

Tout comme dans le cas examiné précédemment, on obtient les fonctions $A_1(a, \varkappa)$, $n - 1 + B_1(a, \varkappa)$ des variables lentes a, $\varkappa$ au cours de la réalisation de l'algorithme *sous la forme des seconds membres des équations* (1.6.14) *pour les variables lentes mis en moyenne suivant la variable rapide* ψ:

$$A_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{n} f \sin\psi\right) d\psi.$$

Il en est de même pour B_1. On a explicitement [1.17]

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{d\nu} = -\frac{4e}{n+1}\cos\varkappa \equiv -\frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial\varkappa},\\
&\frac{d\varkappa}{d\nu} = \left[\frac{n}{2}+\frac{n}{a}J_1(a)\right]-1+\frac{4e}{a(n+1)}\sin\varkappa \equiv \frac{1}{a}\frac{\partial\Phi}{\partial a},\\
&\Phi(a,\varkappa) = \frac{4e}{n+1}a\sin\varkappa + n\left[\frac{a^2}{4}-(J_0(a)-1)\right]-\frac{a^2}{2}.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.6.15)$$

Ici $J_0(a)$ et $J_1(a)$ sont des fonctions de Bessel, d'ordres 0 et 1 res-

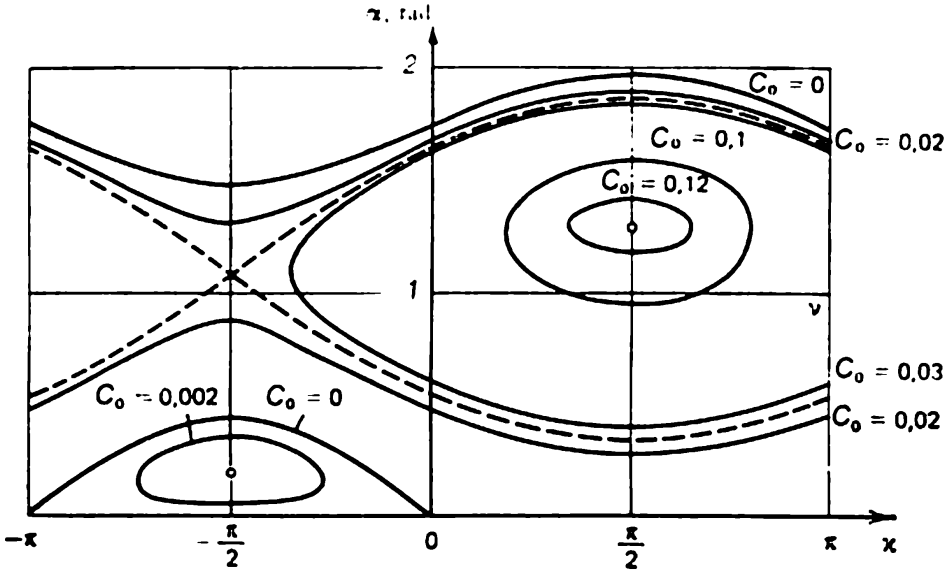


Fig. 1.9. Réponse en amplitude ($n^2 = 1,2$, $e = 0,01$)

pectivement *). Dérivant Φ par rapport à ν, on obtient d'après (1.6.15)

$$\frac{d\Phi}{d\nu} = \frac{\partial\Phi}{\partial a}\frac{da}{d\nu} + \frac{\partial\Phi}{\partial\varkappa}\frac{d\varkappa}{d\nu} \equiv 0.$$

Les équations (1.6.15) admettent donc une intégrale première

$$\Phi(a, \varkappa) = C_0 = \text{Cte}$$

qui donne la « réponse en amplitude», c'est-à-dire la variation de l'amplitude a en fonction de la phase $\varkappa$ des trajectoires au voisinage des résonances. Quelques courbes de réponse en amplitude pour différentes valeurs de C_0 sont présentées sur la figure 1.9. Pendant que

*) Ce qu'il importe de savoir sur les fonctions de Bessel, c'est que les premiers termes de leurs développements en série suivant l'argument se présentent de la façon suivante:

$$J_1(a) = \frac{a}{2} - \frac{a^3}{4} + \ldots, \quad J_0(a) = 1 - \frac{a^2}{2^2} + \frac{a^4}{2^6} - \ldots$$

a (ν) et $\varkappa$ (ν) varient (lentement) en fonction de ν, le point représentatif se déplace dans le plan a, $\varkappa$ en parcourant une des courbes intégrales de la figure. Les points fixes observés ($\varkappa = \pm \pi/2$, $a = a_*$) correspondent aux oscillations périodiques (de période 2π en ν et d'amplitude constante) ; dans tous les autres cas l'amplitude varie lentement entre ses valeurs maximale et minimale. Il ressort de

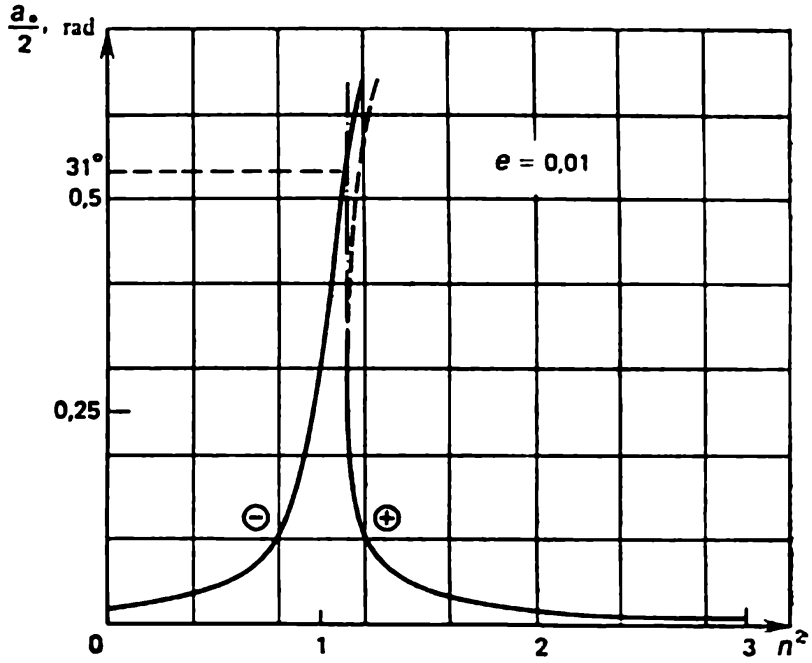


Fig. 1.10. Variation de l'amplitude en fonction de la fréquence ($e = 0{,}01$)

(1.6.15) que la valeur de l'amplitude constante a_* en régime périodique est liée à l'excentricité e et au paramètre n^2 par la formule

$$n^2 = \frac{a_* \pm 4e}{2J_1(a_*)}.$$

La courbe de la figure 1.10 représente la fonction $\frac{a_*}{2}(n^2)$ pour e fixé. On remarque que pour $e \approx 0{,}01$ et les valeurs de n^2 éloignées de la valeur de résonance, l'amplitude d'oscillation du satellite autour du rayon vecteur ne dépasse guère 0°, 5, alors qu'elle atteint facilement 30° en cas de résonance (pour $n^2 \sim 1$) ! (D'une façon générale, on a $a_* \sim e$ quand $n^2 \gg 1$ ou $n^2 \ll 1$ et $a_* \sim \sqrt[3]{e}$ quand $n^2 \sim 1$.) Une dernière remarque : on a soit une solution périodique unique, lorsque

$$e > \sqrt{\frac{2}{27}}\,\frac{(n^2-1)^{3/2}}{n},$$

soit trois solutions périodiques, si

$$e < \sqrt{\frac{2}{27}}\,\frac{(n^2-1)^{3/2}}{n}.$$

Tout cela découle de (1.6.15). En somme, les méthodes asymptotiques ont donné une riche moisson d'informations sur la nature des oscillations du satellite.

En effet, l'exemple que nous venons d'étudier montre que

1° une méthode asymptotique est utile quand les variables peuvent être classées en « lentes » et « rapides » (le système d'équations contenant un petit paramètre);

2° on obtient la première approximation en passant à la moyenne dans les équations de départ (convenablement transformées) indépendamment suivant chacune des variables rapides. La mise en moyenne est possible toutes les fois qu'il n'y a pas de résonance entre les variables rapides;

3° s'il y a résonance, on est amené à transformer le système d'équations dans son voisinage, auquel cas on a plus de variables lentes et, par conséquent, moins de variables rapides;

4° si les équations de départ sont non intégrables, les équations de première approximation asymptotique (système mis en moyenne) peuvent se révéler en revanche intégrables et procurer une information fort utile sur la variation de la solution.

On s'en rend compte une fois de plus en examinant les idées principales de la méthode asymptotique sous une forme un peu plus générale *). Les systèmes (1.6.4), (1.6.14), de même que le système d'équations différentielles du mouvement perturbé (1.5.7), ont la structure suivante:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon X(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= \omega(x) + \varepsilon Y(x, y, \varepsilon), \end{aligned}\right\} \tag{1.6.16}$$

où x est le vecteur variables lentes, y le vecteur variables rapides, ε le petit paramètre. Dans le cas concret des équations (1.5.7) on a une seule variable rapide l, mais il peut y en avoir plus: c'est cette généralisation qui était sous-entendue. Le fait que le mouvement perturbé soit exposé à des perturbations petites a été mis en évidence par l'introduction du petit paramètre $\varepsilon \ll 1$ sous forme explicite. Si $\varepsilon = 0$, on a $x = \text{Cte} = x_0$ et $y = \omega(x_0)\, t + y_0$. Admettons que X et Y soient périodiques de période 2π par rapport aux variables rapides y. Cherchons la solution de (1.6.16) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 u_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots, \\ y &= \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}) + \varepsilon^2 v_2(\bar{x}, \bar{y}) + \ldots, \end{aligned}\right\} \tag{1.6.17}$$

*) Pour se faire une idée de l'état actuel des méthodes asymptotiques utilisées en théorie des oscillations non linéaires, voir le livre de N. Moïsséev [1.8] qui contient beaucoup de problèmes de dynamique du vol spatial traités par les méthodes asymptotiques.

où $\bar{x}$, $\bar{y}$ sont les nouvelles variables et u_i, v_i sont inconnues et doivent être choisies de telle façon que $\bar{x}$, $\bar{y}$ vérifient le nouveau système d'équations différentielles

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \varepsilon A_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 A_2(\bar{x}) + \ldots, \\ \dot{\bar{y}} &= \omega(\bar{x}) + \varepsilon B_1(\bar{x}) + \varepsilon^2 B_2(\bar{x}) + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{1.6.18}$$

Plus on retient de termes dans (1.6.17), plus la solution sera exacte. Il est clair que le système (1.6.18) est beaucoup plus simple que le système de départ (1.6.16), parce que les variables rapides et lentes sont séparées. C'est leur séparation qui constitue le fond des méthodes asymptotiques.

Supposons que les fonctions u_i, v_i soient bornées, car c'est le seul cas où chaque terme de (1.6.17) est faible devant le terme précédent. Compte tenu de (1.6.18), portons (1.6.17) dans (1.6.16) et groupons les termes de même degré en ε : nous obtenons un système d'équations aux dérivées partielles dont les seconds membres sont connus :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_1}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = X(\bar{x}, \bar{y}, 0) - A_1(\bar{x}),$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial v_1}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = Y(\bar{x}, \bar{y}, 0) + \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} u_1^\alpha(\bar{x}, \bar{y}) - B_1(\bar{x}),$$

. . . . . .

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial u_n}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = g_n - A_n,$$

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial v_n}{\partial \bar{y}_i} \omega_i(\bar{x}) = h_n - B_n.$$

Les deux premières équations correspondent aux termes du premier degré en ε, et les deux dernières aux termes de degré n en ε ; u_j v_j, A_j, B_j sont les fonctions vectorielles cherchées ; k est le nombre des variables rapides (et la dimension des vecteurs v_j, B_j, ω_i, Y) ; m est le nombre des variables lentes (et la dimension des vecteurs u_j, A_j, X) ; u_1^α est la « composante α » du vecteur u_1 ; les fonctions g_n, h_n, A_n, B_n se laissent exprimer sous forme explicite au départ des fonctions obtenues dans les approximations précédentes. Toutes les équations aux dérivées partielles étant de même type, il suffit de résoudre la première, les autres étant traitées par analogie.

La fonction vectorielle X est par définition périodique par rapport à chacune des variables y et se développe donc en série de Fourier

$$X(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n_1, \ldots, n_k} a^{(x)}_{n_1, \ldots, n_k}(\bar{x})\, e^{i(n_1\bar{y}_1 + \ldots + n_k\bar{y}_k)}.$$

Par conséquent, on peut chercher $u_1(\bar{x}, \bar{y})$ sous la forme

$$u_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{n_1, \ldots, n_k} b_{n_1, \ldots, n_k}(\bar{x})\, e^{i(n_1\bar{y}_1 + \ldots + n_k\bar{y}_k)} + \sum_{i=1}^{k} c_i(\bar{x})\, \bar{y}_i. \tag{1.6.19}$$

Portons cette valeur de u_1 dans la première équation aux dérivées partielles ci-dessus. Il vient

$$\left.\begin{aligned} b_{n_1, \ldots, n_k} &= \frac{a^{(x)}_{n_1, \ldots, n_k}(\bar{x})}{i(n_1\omega_1 + \ldots + n_k\omega_k)}, \\ \sum_{i=1}^{k} c_i(\bar{x})\, \omega_i(\bar{x}) &= a^{(x)}_{0, \ldots, 0}(\bar{x}) - A_1(\bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{1.6.20}$$

La première de ces formules contient au moins un n_i non nul. Puisque u_1 est bornée par définition, tous les c_i doivent s'annuler, sinon u_1 croît indéfiniment en fonction de $\bar{y}$ d'après (1.6.19). Or, si tous les c_i sont nuls, il découle aussitôt de (1.6.20) que $A_1(\bar{x}) = a^{(x)}_{0, \ldots, 0}(\bar{x})$. Or, le terme « zéro » de la série de Fourier est égal à la valeur moyenne de la fonction développée. Donc

$$\left.\begin{aligned} A_1(\bar{x}) &= \frac{1}{(2\pi)^k} \underbrace{\int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi}}_{k} X(\bar{x}, \bar{y}, 0)\, d\bar{y}_1 \ldots d\bar{y}_k = \bar{X}, \\ u_1 &= \sum_{n_i \neq 0} \frac{a^{(x)}_{n_1, \ldots, n_k}(\bar{x})}{i(n_1\omega_1 + \ldots + n_k\omega_k)}\, e^{i(n_1\bar{y}_1 + \ldots + n_k\bar{y}_k)} + \\ &\qquad + b^{(x)}_{0, \ldots, 0}(\bar{x}). \end{aligned}\right\} \tag{1.6.21}$$

La fonction $b^{(x)}_{0, \ldots, 0}(\bar{x})$, arbitraire, se définit par un raisonnement différent.

De même

$$B_1 = \bar{Y} + \overline{\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial\omega}{\partial x_\alpha} u_1^\alpha},$$

$$v_1 = \sum_{n \neq 0} \frac{a^{(y)}_{n_1, \ldots, n_k}(\bar{x})}{i(n_1\omega_1 + \ldots + n_k\omega_k)}\, e^{i(n_1\bar{y}_1 + \ldots + n_k\bar{y}_k)} + b^{(y)}_0(\bar{x})$$

et ainsi de suite.

Or, ces calculs ont un sens si et seulement si le système est exempt de toute résonance, c'est-à-dire si

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + \ldots + n_k\omega_k \neq 0$$

pour toute famille de nombres entiers n_i, sinon les fonctions u_1 v_1 deviennent indéfinies (indéfiniment grandes).

S'il n'y a pas de résonance, on peut, en supprimant les termes de (1.6.17) de degré supérieur à $n - 1$ en ε, définir dans l'intervalle de temps $t \sim 1/\varepsilon$ les variables lentes à ε^n près et les variables rapides à ε^{n-1} près, de sorte que

$$|x - \bar{x}| \sim \varepsilon^n, \quad |y - \bar{y}| \sim \varepsilon^{n-1}.$$

Par conséquent, il n'y a aucun sens à chercher les termes au-delà de ε^{n-1} pour les variables rapides. En particulier, au lieu des équations (1.6.16), on obtient *en première approximation* les nouvelles équations

$$\left.\begin{aligned} x &= \bar{x}, & y &= \bar{y}, \\ \frac{d\bar{x}}{dt} &= \varepsilon A_1(\bar{x}), & \frac{d\bar{y}}{dt} &= \omega(\bar{x}) \end{aligned}\right\} \tag{1.6.22}$$

dans lesquelles $A_1(\bar{x})$ est défini par (1.6.21).

Ainsi donc, en première approximation la méthode asymptotique se réduit à la méthode de la moyenne. Sur l'intervalle de temps $t \sim \sim 1/\varepsilon$, ces dernières équations sont résolues avec la précision $|x - - \bar{x}| \sim \varepsilon$, $|y - \bar{y}| \sim 1$. Le paramètre ε étant généralement petit (car les perturbations sont faibles), l'intervalle temporel admettant la première approximation est suffisamment étendu pour qu'on puisse cerner les tendances d'évolution du système.

Les variables rapides se définissent avec une précision moins bonne, mais cela n'a pas d'importance, car ce sont les variables lentes qui définissent généralement l'évolution ; or, les variables lentes sont asymptotiquement (suivant ε pour $\varepsilon \to 0$) proches de leurs valeurs exactes : nous avons déjà dit que cela explique justement l'appellation « méthodes asymptotiques ».

Les équations de la première approximation sont remarquablement faciles à déduire : il suffit de faire la moyenne indépendamment pour chacune des variables rapides. Or, cela n'est possible que s'il n'y a pas de résonance. Au contraire, s'il existe une famille de nombres n_i^0 telle que la somme

$$\sum_{i=1}^{k} n_i^0\omega_i = 0,$$

c'est-à-dire si les fréquences se rapprochent, la quantité

$$n_1^0\vartheta = n_1^0\bar{y}_1 + \ldots + n_k^0\bar{y}_k$$

sera lentement variable au voisinage de la résonance, parce que sa dérivée

$$n_1^0\dot{\vartheta} = \sum_{i=1}^{k} n_i^0\omega_i = \varepsilon h(x)$$

est peu différente de zéro. On ne peut donc plus faire la moyenne indépendamment suivant chaque $\bar{y}_i$, au risque de faire subir la même opération à la variable lente ϑ! On peut cependant assimiler ϑ à une nouvelle variable indépendante. Désignant le vecteur variables rapides par $z = (y_2, \ldots, y_k)$, le système (1.6.16) s'écrira

$$\dot{x} = \varepsilon X^*(x, \vartheta, z, \varepsilon), \quad \dot{\vartheta} = \varepsilon\Theta^*(x, \vartheta, z, \varepsilon),$$

$$\dot{z} = \omega(x) + \varepsilon Z^*(x, \vartheta, z, \varepsilon).$$

De structure identique à (1.6.16), ce dernier système a une variable lente de plus et une variable rapide de moins. Le problème s'en trouve réduit au précédent, car le nombre de variables rapides et lentes n'a pas beaucoup d'importance. Nous considérerons les algorithmes de passage à la moyenne dans le mouvement avec et sans résonances, pour le cas spécial des équations canoniques du mouvement perturbé.

Mise en moyenne des équations canoniques. Ainsi donc, les équations différentielles de la première approximation de la méthode asymptotique s'obtiennent en faisant la moyenne des seconds membres des équations pour les variables lentes suivant les variables rapides; cette opération se fait en prenant les valeurs non perturbées des variables. Voyons comment s'opère la mise en moyenne lorsque les équations se présentent sous une forme canonique (du type (1.5.7)). Soit E_i une variable lente vérifiant l'équation

$$\frac{dE_i}{dt} = \pm\frac{\partial F}{\partial E_j} \tag{1.6.23}$$

et supposons que F soit une fonction hamiltonienne périodique d'une variable rapide. On a en l'occurrence une seule variable rapide, à savoir l (dans le cas général il peut y en avoir plus). Généralement, dans les problèmes de mécanique du vol spatial, F est fonction explicite de l'anomalie vraie $\nu(l)$ et non de l, si bien qu'on peut mettre

$$F = F(\nu(l)). \tag{1.6.24}$$

Dans le cas considéré la période rapide est celle de révolution du satellite sur son orbite $T = 2\pi/n$, et la mise en moyenne dans le second membre de (1.6.23) s'opère comme suit:

$$\pm\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial F}{\partial E_j}\Big|_{E_k=\bar{E}_k} dl = \pm\frac{\partial}{\partial E_j}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\,dl = \pm\frac{\partial}{\partial E_j}\tilde{F}. \tag{1.6.25}$$

Le symbole $E_k = \bar{E}_k$ veut dire ici qu'on fait la moyenne en conservant des valeurs constantes des paramètres E_k.

Développons un peu l'expression de $\tilde{F}$:

$$\tilde{F} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\nu) \frac{dl}{d\nu} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \frac{dl}{dt} \frac{dt}{d\nu} d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Fn \frac{dt}{d\nu} d\nu. \quad (1.6.26)$$

Il s'agit d'expliciter $dt/d\nu$ en fonction de ν et des éléments. Mettre en moyenne F suivant la variable rapide l revient donc à le faire suivant l'anomalie vraie explicite ν par rapport au poids $n \frac{dt}{d\nu}$. Il est commode d'introduire le temps sans dimension $\tau = nt$ et la nouvelle valeur moyenne $\bar{F} = \tilde{F}/n$ de F, auquel cas on obtient définitivement

$$\left.\begin{aligned} \frac{dE_i}{d\tau} &= \pm \frac{\partial \bar{F}}{\partial E_j}, \\ \bar{F} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F \frac{dt}{d\nu} d\nu. \end{aligned}\right\} \quad (1.6.27)$$

Les équations d'évolution (1.6.27) ont quelques facultés particulières:

1. Mettre en moyenne les équations du mouvement exactes de départ équivaut à mettre en moyenne la fonction de forces. Autrement dit, *on n'a pas besoin* d'établir préalablement toutes les équations du système: il suffit d'écrire la fonction caractéristique F et de la mettre en moyenne, après quoi on peut écrire d'emblée les équations d'évolution.

2. Les seconds membres du système (1.6.27) sont indépendants de ν (grâce à la mise en moyenne suivant ν), donc aussi de l, c'est-à-dire que $\partial \bar{F}/\partial l = 0$. Il ressort alors de la première équation de Delaunay que

$$L = L_0 \quad (1.6.28)$$

ou, ce qui revient au même, que

$$a = a_0. \quad (1.6.29)$$

Si donc la force perturbatrice exercée sur le satellite est conservative, le demi-grand axe de son orbite n'évolue pas et conserve une position constante en moyenne. Il en est de même quand F est fonction de plusieurs variables rapides $l_1, l_2, \ldots, l_k$. Ce fait est expliqué par le théorème de Laplace, bien connu en mécanique céleste, selon lequel les demi-grands axes des orbites planétaires n'ont pas de variations séculaires (c'est-à-dire accumulées). Pour plus de détails, voir le livre de G. Doubochine [1.1]. En fait, le théorème de Laplace n'a pu

être démontré avec rigueur qu'au début des années soixante de ce siècle par V. Arnold, après quoi on a pu délimiter convenablement son domaine d'application *).

3. Puisque, en première approximation, la variable rapide l varie de la même façon en mouvement perturbé et non perturbé et que la variable lente L n'évolue pas du tout, le système d'évolution ne contient que quatre équations, au lieu de six:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dG}{d\tau} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial g}, \quad \frac{dg}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial G}, \\ \frac{dH}{d\tau} &= \frac{\partial \bar{F}}{\partial h}, \quad \frac{dh}{d\tau} = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial H}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6.30}$$

4. F étant indépendante de τ, les équations d'évolution (1.6.30) admettent comme intégrale première

$$\bar{F} = \text{Cte}. \tag{1.6.31}$$

Le système d'évolution complet admet donc au total deux intégrales premières du mouvement: (1.6.28) et (1.6.31).

Nous avons considéré jusqu'à présent que nos équations contiennent une variable rapide unique, à savoir l. Or, transcrites en termes d'éléments de Delaunay (1.5.7), les mêmes équations peuvent fort bien contenir d'autres variables rapides qui interviennent dans l'expression de F. Par exemple, en examinant l'influence de la Lune et du Soleil sur le satellite on est obligé de calculer F en tenant compte des coordonnées de la Lune et du Soleil qui, sous certaines conditions, peuvent aussi être considérées comme des variables rapides.

Or, même dans ce cas, les propriétés 1 à 4 énumérées ci-dessus restent vraies, à condition de prendre comme valeur moyenne $\bar{F}$ la valeur correspondante de F mise en moyenne suivant toutes les variables rapides, de façon indépendante suivant chaque variable. Quand ce cas se présente, c'est-à-dire quand il y a plusieurs variables rapides en jeu, la situation peut changer radicalement: les fréquences des variables rapides étant voisines, c'est la résonance qui se produit. Or, on ne peut faire la moyenne indépendamment suivant les variables rapides qu'en l'absence de résonance. S'il y a résonance, toutes les conclusions précédentes sur l'évolution tombent en défaut, les équations d'évolution prenant une forme différente. Une étude spéciale s'impose alors.

Pour comprendre les particularités des cas de résonance, il suffit d'examiner le cas de deux variables rapides. Soit donc dans les

*) Voir à ce propos les travaux de V. Arnold [1.9, 1.10], ainsi que le quatrième essai du présent livre et l'excellent ouvrage de vulgarisation de V. Diomine [1.11].

équations écrites en éléments de Delaunay

$$F = F(\mathrm{E}_i,\ l,\ l_1), \tag{1.6.32}$$

où E_i sont des variables lentes et l, l_1 des variables rapides.

Quitte à changer légèrement les notations, posons en mouvement non perturbé

$$\frac{dl}{dt} = \omega = \mathrm{Cte}, \tag{1.6.33}$$

$$\frac{dl_1}{dt} = \omega_1 = \mathrm{Cte}. \tag{1.6.34}$$

Il est plus commode d'admettre que F dépend explicitement de l et de l_1, et non de fonctions quelconques de ces arguments. Notons que la dernière relation (1.6.34) reste vraie aussi en mouvement perturbé, ce qui n'a cependant pas beaucoup d'importance.

Supposons qu'il existe des entiers arbitraires (strictement positifs ou négatifs) n_0, m_0 tels que

$$n_0\omega + m_0\omega_1 = 0. \tag{1.6.35}$$

C'est la *résonance*. La somme

$$|\,n_0\,| + |\,m_0\,| \tag{1.6.36}$$

s'appelle *ordre de la résonance*. Au contraire, si, quels que soient les entiers strictement positifs ou négatifs n_0, m_0, on a

$$n_0\omega + m_0\omega_1 \neq 0, \tag{1.6.37}$$

il n'y a pas de résonance. En pratique, on ne considère pas la résonance ponctuelle (1.6.35) mais un certain voisinage de la résonance, de telle sorte que

$$n_0\omega + m_0\omega_1 = \varepsilon,$$

ε faible. Sans résonance, l'introduction de

$$\overline{F} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(l,\ l_1)\,dl\,dl_1 \tag{1.6.38}$$

réduit les équations d'évolution pour les variables lentes E_i à

$$d\mathrm{E}_i/dt = \pm\,\partial\overline{F}/\partial\mathrm{E}_j. \tag{1.6.39}$$

Ici t est le temps avec dimension. Les équations (1.6.39) ont donc toutes les propriétés 1 à 4 des équations d'évolution et vérifient en particulier le théorème de Laplace (non-évolution du demi-grand axe de l'orbite). Ces propriétés restent d'ailleurs vraies pour n'importe quel nombre fini de variables rapides, pourvu que leurs fréquences n'entrent pas en résonance.

Considérons maintenant un cas de résonance. Puisque $F(l, l_1)$ est périodique en l, l_1, elle se laisse développer en série de Fourier

$$F(l, l_1) = \overline{F} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{a_{nm} \sin(nl + ml_1) + b_{nm} \cos(nl + ml_1)\}. \qquad (1.6.40)$$

Ici $\overline{F}$ est définie par (1.6.38); quant aux coefficients de Fourier a_{nm}, b_{nm}, on sait qu'ils se calculent sans peine. Puisque nous considérons le voisinage de la résonance (1.6.35), les variables $\varkappa_{nm} = nl + ml_1$ sont toutes *rapides*, à condition que $n \neq kn_0$ et $m \neq km_0$ simultanément ($k = 1, 2, \ldots$); on peut donc *mettre en moyenne* les termes correspondants, dont les valeurs moyennes sont *nulles*. En plus de $\overline{F}$, on ne laissera dans (1.6.40) que les termes correspondant à l'affectation simultanée des valeurs $n = n_0$, $m = m_0$. La variable $\varkappa = n_0 l + m_0 l_1$ est *lente*, car on a au voisinage de la résonance (1.6.35)

$$\frac{d\varkappa}{dt} = n_0\omega + m_0\omega_1 = \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $\varkappa$ varie lentement. On peut donc remplacer F par les termes d'évolution

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{F}(\mathrm{E}_i, l, l_1) &= \overline{F} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin k\varkappa + b_k \cos k\varkappa), \\ \overline{F}(\mathrm{E}_i) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F\, dl\, dl_1, \\ a_k &= a_{kn_0,\, km_0}(\mathrm{E}_i), \\ b_k &= b_{kn_0,\, km_0}(\mathrm{E}_i). \end{aligned}\right\} \qquad (1.6.41)$$

Ici le symbole E_i couvre cinq variables lentes L, G, H, g, h.

Faisons l'équation d'évolution pour notre nouvelle variable $\varkappa$:

$$\frac{d\varkappa}{dt} = n_0 \frac{dl}{dt} + m_0\omega_1 = -n_0 \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial L} + m_0\omega_1.$$

Introduisons

$$\Phi(\mathrm{E}_i, \varkappa) = n_0 \widetilde{F} - m_0\omega_1 L. \qquad (1.6.42)$$

On obtient alors

$$\frac{d\varkappa}{dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial L}, \quad \frac{dL}{dt} = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial l} = \frac{\partial \widetilde{F}}{\partial \varkappa} n_0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \varkappa},$$

et le système d'évolution complet s'écrit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\varkappa}, \quad \frac{d\varkappa}{dt}=-\frac{\partial\Phi}{\partial L}, \\ &\frac{dG}{dt}=\frac{1}{n_0}\frac{\partial\Phi}{\partial g}, \quad \frac{dg}{dt}=-\frac{1}{n_0}\frac{\partial\Phi}{\partial G}, \\ &\frac{dH}{dt}=\frac{1}{n_0}\frac{\partial\Phi}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt}=-\frac{1}{n_0}\frac{\partial\Phi}{\partial H}. \end{aligned}\right\} \tag{1.6.43}$$

Dans ce système toutes les variables sont lentes et $\Phi = \Phi(L, G, H, \varkappa, g, h)$ ne dépend pas explicitement de t; on s'assure sans peine que le système en question admet comme intégrale première

$$\Phi = \text{Cte},$$

ou sous forme développée

$$\left\{\overline{F}(L, G, H, g, h)+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k(L, G, H, g, h)\sin k\varkappa+ \right.$$
$$\left. + b_k(L, G, H, g, h)\cos k\varkappa]\right\} n_0 - m_0\omega_1 L = \text{Cte}. \tag{1.6.44}$$

Il n'est pas nécessaire d'en dire plus pour comprendre à quel point le cas de résonance diffère d'un cas de non-résonance. Dans le développement de la fonction $\widetilde{F}$, en plus du terme $\overline{F}$ hérité du cas de non-résonance, on doit considérer aussi l'appoint $\sum(a_k \sin k\varkappa + b_k \cos k\varkappa)$ défini par la nouvelle variable lente $\varkappa$ et dû exclusivement à la présence de la résonance. A son tour, cet appoint ajoute deux équations au système d'évolution, qui contient donc six équations et non quatre comme dans le cas de non-résonance. On conçoit que l'étude du système d'évolution devient alors très compliquée du fait de la résonance.

S'il y a résonance, *le théorème de Laplace tombe en défaut*: *le demi-grand axe évolue*. Le système d'évolution admet, comme dans le cas de non-résonance, une intégrale première qui tient compte de la constance de la nouvelle fonction hamiltonienne, mais la structure de cette intégrale est beaucoup plus compliquée qu'en l'absence de résonance.

7. Le satellite dans le champ gravitationnel terrestre

Son mouvement peut être analysé par la méthode de la moyenne que nous venons de décrire.

La force d'attraction newtonienne (1.2.1) et la fonction de forces correspondante (1.2.2) ne définissent que d'une façon approximative la force réelle exercée par la Terre sur le satellite. Les formules (1.2.1) et (1.2.2) seraient exactes si la Terre était parfaitement sphérique et homogène, ou bien si elle était formée de couches concentriques

homogènes. En réalité il en est autrement : la Terre est un peu « aplatie » en direction des pôles (et aussi — très légèrement — sur ses « côtés »), un peu dissymétrique, non homogène, ce qui fait que le champ de forces créé par la Terre a une structure assez compliquée. Pour mieux approcher le champ de forces réel qu'avec la formule (1.2.2) on met la fonction de forces sous la forme

$$U=\frac{\mu}{r}\left\{1+\sum_{k=2}^{\infty} I_k\left(\frac{R}{r}\right)^k P_k(\sin\varphi)\right\}, \quad \mu=fM. \qquad (1.7.1)$$

Ici M est la masse de la Terre, f la constante universelle de gravitation, R le rayon équatorial de la Terre, φ la latitude géographique du point (situé à la distance r du centre de la Terre). Les coefficients I_k prennent des valeurs fixes sans dimension. Les fonctions P_k sont des *polynômes de Legendre* :

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(x)=1,\\
&P_1(x)=x,\\
&P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),\\
&P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&P_n(x)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7.2)$$

Ainsi donc, la fonction de forces (1.7.1) ne dépend pas seulement de la distance au centre de gravité comme (1.2.2) mais aussi de la latitude du point. La formule (1.7.1) suppose que le champ de forces est axisymétrique (symétrique par rapport à l'axe traversant les pôles terrestres). Une expression plus exacte de U tiendrait compte aussi de l'« aplatissement latéral » du champ de forces, de sa dissymétrie, auquel cas U serait également fonction de la longitude du point ; or, nous pouvons nous borner à l'expression (1.7.1). Nous remarquons que cette formule est la somme du potentiel newtonien (1.2.2) et de quelques termes additionnels qui, étant donné la nature des perturbations, doivent rester faibles devant le terme dominant (premier terme). En effet, d'après des données récentes, les coefficients I_k dans (1.7.1) prennent les valeurs

$$\left.\begin{aligned}
&I_2=-1082{,}6\cdot 10^{-6},\\
&I_3=2{,}5\cdot 10^{-6},\\
&I_4=1{,}6\cdot 10^{-6},\\
&\dots\dots\dots
\end{aligned}\right\} \qquad (1.7.3)$$

si bien que la contribution du plus grand coefficient (I_2) n'atteint qu'un dixième de pour cent à peine ; les contributions des autres coefficients sont encore plus petites. Le coefficient I_2 caractérise la différence essentielle entre le champ gravitationnel réel de la Terre et celui qu'aurait une Terre parfaitement sphérique : cette différence est due à l'aplatissement notable de la Terre en direction polaire.

Considérons l'effet de cette perturbation essentielle sur le mouvement du satellite dans le champ gravitationnel terrestre, compte

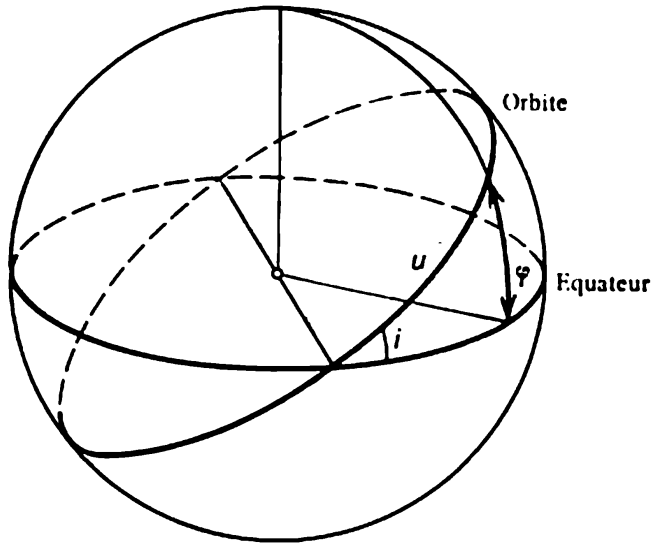


Fig. 1.11. Orbite du satellite en coordonnées équatoriales

tenu des possibilités des méthodes asymptotiques décrites précédemment. Le problème de mouvement du satellite dans le champ gravitationnel de la Terre « aplatie » fournit une illustration très claire de l'application des méthodes asymptotiques en mécanique non linéaire. D'autre part, il constitue un des problèmes de fond de la théorie du mouvement des satellites artificiels. Mettons donc la fonction de forces perturbatrice sous la forme

$$U = \frac{\mu}{r} I_2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{1}{2} (3 \sin^2 \varphi - 1). \qquad (1.7.4)$$

Se rappelant les définitions de l'argument de la latitude $u = \omega + \nu$ et de l'inclinaison i de l'orbite sur l'équateur, on peut faire un dessin explicatif (fig. 1.11) et écrire

$$\sin \varphi = \sin i \sin u. \qquad (1.7.5)$$

La fonction hamiltonienne F diffère de U par le terme qui dépend seulement de la variable L ; or, nous avons vu dans la « Parenthèse sur les méthodes asymptotiques » que cette variable n'évolue pas. On peut donc remplacer la valeur moyenne $\overline{F}$ dans les quatre

équations d'évolution (1.6.30) par la valeur moyenne $\overline{U}$ qui se définit, d'après les formules (1.7.4), (1.7.5), (1.6.27), comme suit :

$$\overline{U} = \frac{\mu R^2 I_2}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [3 \sin^2 (\omega + \nu) \sin^2 i - 1] \frac{1}{r^3} \frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} d\nu. \qquad (1.7.6)$$

En y portant $r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}$ et en faisant les transformations qui s'imposent on obtient

$$\overline{U} = \frac{\sqrt{\mu} I_2 R^2}{4 p^{3/2}} (1 - 3 \cos^2 i), \qquad (1.7.7)$$

ou, en écrivant les éléments osculateurs à l'aide de ceux de Delaunay (au moyen des formules (1.5.5)),

$$\overline{U} = \frac{1}{4} \frac{\mu^2 I_2 R^2}{G^3} \left(1 - 3 \frac{H^2}{G^2}\right). \qquad (1.7.8)$$

Nous voyons que $\overline{U}$ ne contient pas g, h. Il s'ensuit qu'en plus de l'intégrale

$$L = L_0,$$

les équations du mouvement admettent les intégrales

$$G = G_0, \quad H = H_0.$$

En termes d'éléments osculateurs classiques, cela signifie que

$$a = \text{Cte}, \quad e = \text{Cte}, \quad i = \text{Cte}. \qquad (1.7.9)$$

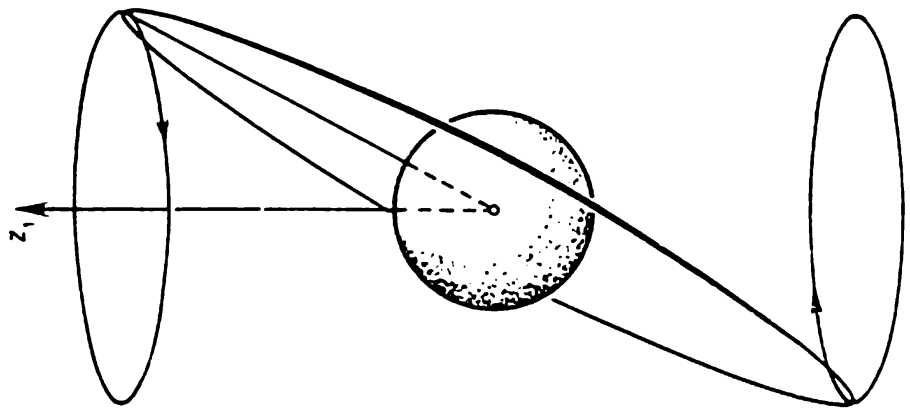
Il va de soi qu'on a alors aussi $p = a(1 - e^2) = \text{Cte}$. Ainsi donc, *la forme aplatie de la Terre n'affecte pas la forme de l'orbite ni son inclinaison sur l'équateur* (rappelons toutefois qu'il s'agit des effets fondamentaux du mouvement décrits par des équations d'évolution mises en moyenne). Tout l'effet de l'évolution se trouve réduit à la variation des éléments g et h, c'est-à-dire de la longitude du nœud ascendant Ω et de la longitude du périgée ω. On définit sans peine ces variations en portant la fonction de forces (1.7.8) (au lieu de $\overline{F}$) dans les équations d'évolution pour g et h et en faisant le passage inverse de H, G aux éléments osculateurs.

Le résultat est le suivant :

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{3}{2} I_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 \cos i, \qquad (1.7.10)$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \frac{3}{4} I_2 \left(\frac{R}{p}\right)^2 (1 - 5 \cos^2 i). \qquad (1.7.11)$$

De la sorte, l'aplatissement de la Terre fait que le plan de l'orbite précessionne avec la vitesse (1.7.10), tandis que l'orbite elle-même, sans changer de forme, précessionne dans son plan avec la



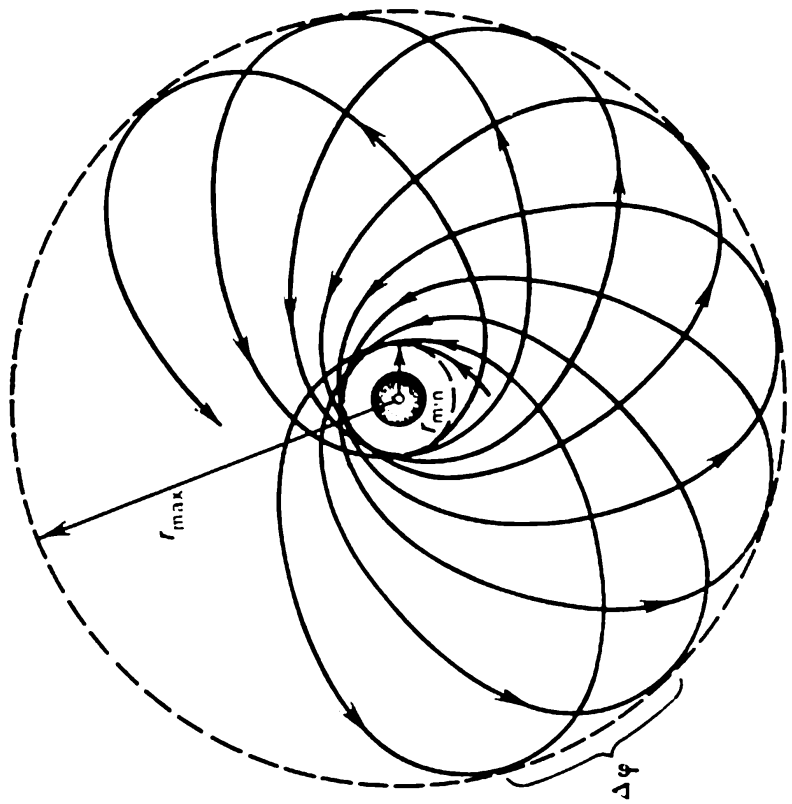


Fig. 1.12. Orbite perturbée du satellite dans le champ gravitationnel terrestre: *a*, mouvement dans le plan de l'orbite; *b*, mouvement du plan de l'orbite

vitesse (1.7.11). Le mouvement du plan de l'orbite est rétrograde ($I_2 < 0$, $\cos i > 0$) (fig. 1.12). Beaucoup de spoutniks soviétiques ont l'inclinaison de l'orbite sur l'équateur $i \approx 65°$. La quantité $1-5\cos^2 i$ reste très faible, et le périgée de l'orbite se déplace très lentement en comparaison avec le nœud de l'orbite. Généralement, le déplacement journalier est d'environ 3 degrés pour le nœud et d'environ 0,5 degré pour le périgée.

Les formules (1.7.10), (1.7.11) ont été publiées par exemple dans un article de D. Okhotsimski, T. Eneiev, G. Taratynova du n° 1a, année 1957, de la revue *Ouspekhi fizitcheskikh naouk* [1.12] *). Les auteurs y parlent aussi des perturbations du mouvement du satellite provoquées par les couches hautes de l'atmosphère. En effet, bien que raréfiée, l'atmosphère à l'altitude du spoutnik freine progressivement son mouvement. Le satellite se rapproche donc petit à petit de la Terre et finalement tombe.

Dans le présent livre, nous n'aborderons pas les questions d'influence de l'atmosphère sur l'orbite: le lecteur intéressé par ces problèmes trouvera une analyse profonde des mouvements perturbé et non perturbé du satellite dans les livres de D. Okhotsimski [1.13] et de P. Eliasberg [1.14]. Il trouvera aussi un exposé remarquable des problèmes de mécanique du vol spatial dans le livre de M. Balk [1.15]. L'intérêt du lecteur sera sûrement éveillé par le paragraphe « Le paradoxe du spoutnik » (page 287): « A cause du freinage par l'atmosphère, la vitesse linéaire du satellite en orbite sensiblement circulaire se trouve accrue; l'accélération agissant dans le sens de mouvement est la même que si la force de résistance frontale avait changé de sens et poussait le satellite vers l'avant ». (Sic! — *V.B.*)

Si le lecteur, une feuille de papier et le crayon à la main, n'arrive pas à percer ce mystère, il n'a qu'à consulter le livre de M. Balk (ou, à la rigueur, le septième essai du présent ouvrage).

Quelques effets de dynamique des satellites artificiels, surtout les effets aérodynamiques, sont discutés dans le tour d'horizon de L. Sédov [1.19].

---

*) Le même n° de la revue, paru à la veille du lancement du premier spoutnik (le 4 octobre 1957), publiait des travaux récents de quelques chercheurs soviétiques consacrés à la dynamique des satellites artificiels de la Terre et aux trajectoires des vols vers la Lune.

DEUXIEME ESSAI

SUR LA SECONDE NAISSANCE D'UN VIEUX PROBLÈME, OU CE QU'ON OBTIENT EN PLAÇANT DEUX MASSES À UNE DISTANCE PUREMENT IMAGINAIRE L'UNE DE L'AUTRE

... Et plus il regardait le cordon
du grelot, plus il était sûr
d'avoir vu quelque chose de pareil...
Quelque part, il y a longtemps...

A. A. Milne
Winnie l'ourson

— Et après?
— Alors nous dirons tous ensemble : «AHA »
— Tous les trois?
— Oui.

A. A. Milne
Winnie l'ourson

1. De Leonhard Euler à nos jours

Nous avons déjà parlé, dans le premier essai, du mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel du sphéroïde terrestre. Il existe tout un appareil mathématique, parfaitement adapté et mis au point, fondé sur les éléments osculateurs et utilisant les méthodes asymptotiques, qui permet de mettre en évidence très facilement les principales perturbations de l'orbite du satellite causées par l'aplatissement de la Terre. Les formules obtenues définissent très exactement la géométrie de l'orbite et donnent un tableau qualitatif et quantitatif du mouvement du satellite. Or, tout cela est bien sûr insuffisant pour le calcul précis de l'orbite. Le problème de mouvement du satellite dans un champ gravitationnel défini par la fonction de forces (1.7.1) n'a pas de solution exacte, car les équations du mouvement ne sont pas intégrables. Or, il suffit de travailler un peu en profondeur le problème de l'intégrabilité (ce que nous avons justement l'intention de faire) pour que des choses vraiment surprenantes, sinon ahurissantes, commencent à se faire jour.

Il se trouve que ce problème est équivalent dans un certain sens au vieux problème du mouvement d'un point dans le champ gravitationnel engendré par deux sources newtoniennes. On sait que Leonhard Euler a pu non seulement poser ce problème mais aussi le réduire aux quadratures. Depuis deux siècles, ce problème ne cesse d'attirer les esprits savants, intrigués tant par son élégance que

par sa ressemblance apparente au très connu « problème des trois corps » dont l'importance en mécanique céleste et en mécanique du vol spatial n'est pas à souligner. En effet, dans le problème « restreint » des trois corps il s'agit du mouvement d'un point matériel non attractif qui se meut dans le champ gravitationnel engendré par deux sources newtoniennes libres (qui se déplacent donc l'une par rapport à l'autre selon les lois de Kepler). La solution du problème restreint permettrait par exemple d'analyser de façon directe le mouvement d'un vaisseau spatial de la Terre vers la Lune. La différence entre le problème du mouvement dans le champ à deux sources fixes et le problème restreint est que les centres d'attraction sont fixes (et ce n'est pas une mince différence...). Rien d'étonnant qu'on ait longtemps cherché à appliquer la solution d'Euler au problème restreint. Les résultats sont pourtant maigres. Le « problème des deux centres fixes » ne s'est trouvé aucune application concrète en mécanique céleste, et toutes les recherches en cette matière, même les plus intéressantes, ne relevaient encore dernièrement que des mathématiques abstraites.

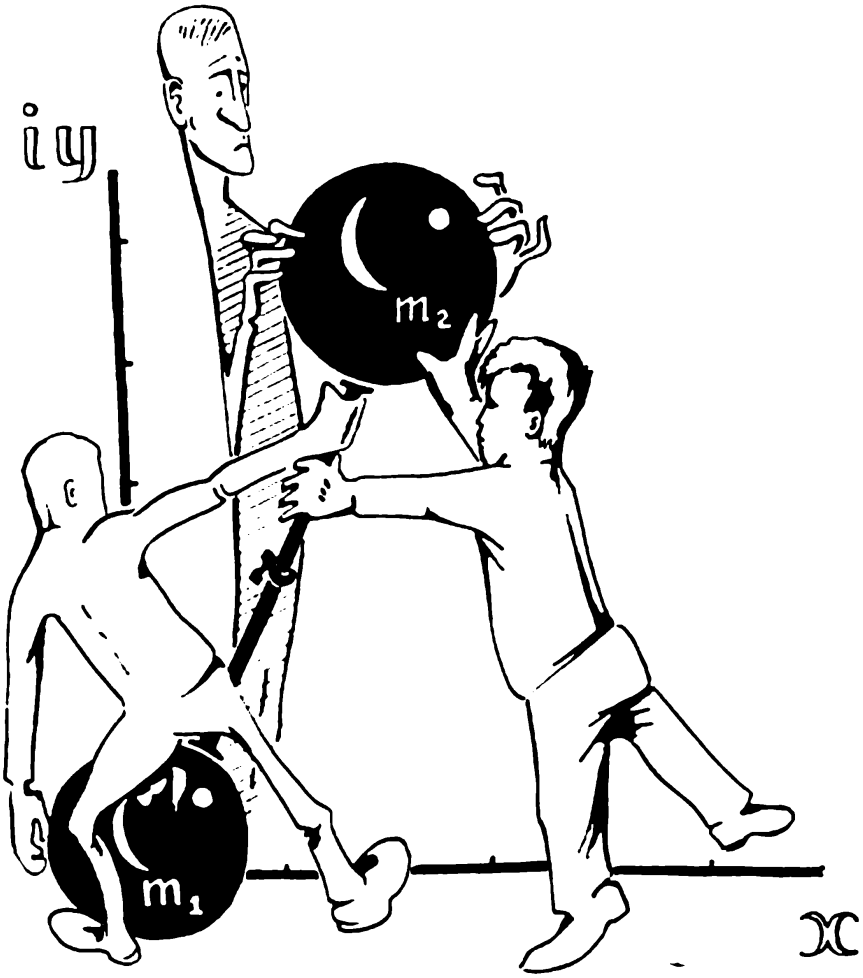
L'avènement des spoutniks a stimulé un rapide progrès de la mécanique et, en particulier, a conduit à la découverte d'une analogie frappante entre le problème des deux centres et celui du mouvement du satellite dans le champ gravitationnel terrestre. C'est ainsi que le vieux problème a reçu une application nouvelle et extrêmement importante à la théorie du mouvement des satellites artificiels de la Terre. Le premier article faisant état de cette analogie [2.1], publié en 1961, appartenait à trois jeunes (à l'époque) chercheurs soviétiques E. Axionov, E. Grébénikov et V. Diomine. Dans leurs travaux ultérieurs ils analyseront en détail le mouvement du satellite dans le champ gravitationnel de la Terre compte tenu de l'analogie nouvellement découverte *).

Le n° suivant est entièrement consacré à l'analogie en question.

2. L'analogie des deux problèmes

Soient deux sources du champ fixes représentées par deux points matériels de masses respectives m_1, m_2. Construisons un système de coordonnées $Oxyz$ de telle façon que son axe Oz passe par m_1 et m_2 (fig. 2.1). Soient c_1, c_2 les distances respectives de O à m_1 et m_2. Dans

*) D. Brower et G. Clemence mentionnent brièvement l'existence d'une analogie entre les deux problèmes dans leur livre [2.2] paru en 1961. On trouve un exposé très circonstancié des problèmes examinés dans la monographie de V. Diomine [2.3] et dans le livre de G. Doubochine [2.4]. L'idée même de remplacer le problème du mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel réel par un problème approché intégrable remonte probablement à M. Kislik qui l'a proposée et mise en pratique en 1958-1959 [2.5]. Aux Etats-Unis, on trouve une approche analogue dans les travaux de J. P. Vinti [2.6].


y
m2
m1
x

le champ de forces d'attraction résultant créé par les points m_1, m_2, plaçons un point de masse m dont on veut connaître le mouvement. Celui-ci est défini par la fonction de forces

$$U_{(2)} = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right), \tag{2.2.1}$$

somme des fonctions de forces d'attraction des deux centres newtoniens (telle est la signification de l'indice (2) dans le premier membre). Ici f est la constante universelle de gravitation ; r_1, r_2 sont les distances du point mobile m aux centres m_1, m_2 respectivement :

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_1)^2},$$
$$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - c_2)^2}.$$

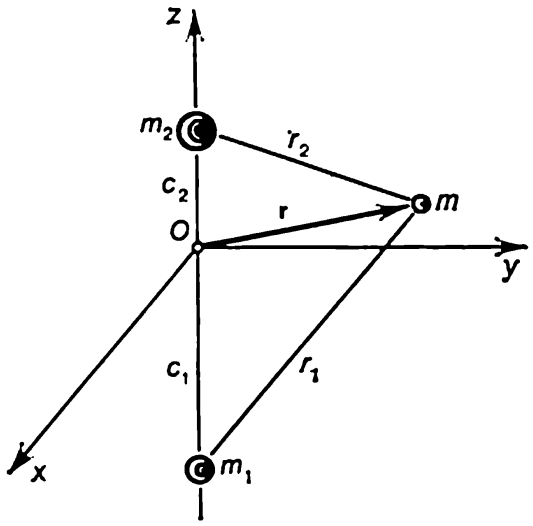


Fig. 2.1. Pour la position du problème

A titre d'exemple, développons l'expression de $1/r_2$:

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{r_2 - 2c_2 z + c_2^2}} = \frac{1}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{z}{r}\frac{c_2}{r} + \left(\frac{c_2}{r}\right)^2}}, \tag{2.2.2}$$

où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ est la distance du point mobile à l'origine des coordonnées. Notons $z/r = \sin\varphi$ (φ est la latitude du point mobile compté à partir du plan Oxy), $\alpha = c_2/r$ et appliquons un développement bien connu en théorie des polynômes de Legendre :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\sin\varphi + \alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(\sin\varphi). \tag{2.2.3}$$

Compte tenu de (2.2.2) et (2.2.3), écrivons

$$\frac{m_2}{r_2} = \frac{m_2}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_2}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi). \tag{2.2.4}$$

Ici P_n est un polynôme de Legendre d'ordre n.

L'expression de m_1/r_1 s'écrit d'une façon analogue. La fonction de forces (2.2.1) intervenant dans le problème des deux centres se met alors sous la forme

$$U_{(2)} = \frac{f(m_1 + m_2)}{r}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\gamma_k}{r^k}P_k(\sin\varphi)\right\}, \tag{2.2.5}$$

où γ_k se déduit de l'égalité

$$(m_1 + m_2)\,\gamma_k = m_1 c_1^k + m_2 c_2^k. \tag{2.2.6}$$

Et c'est là que surgit, presque spontanément, l'analogie entre $U_{(2)}$ définie par (2.2.5) et la fonction de forces U déjà connue du sphéroïde terrestre (formule (1.7.1)). Les deux formules s'écrivent presque de la même façon ; elles seraient identiques si les coefficients constants des termes correspondants dans les deux développements étaient égaux. Du moment que le problème impliquant la fonction de forces (2.2.5) est intégrable, il devrait en être de même du problème lié au mouvement du satellite. Or, en réalité, il en est tout autrement. En effet, le développement (2.2.5) n'ayant que *quatre* paramètres libres m_1, m_2, c_1, c_2, il y a dans (1.7.1) seulement *quatre* termes qu'on pourrait identifier aux termes de (2.2.5). Il est logique de le faire avec les quatre premiers termes des développements, ce qui revient à exiger qu'il y ait

$$\left.\begin{array}{ll} 1) & m_1 + m_2 = M, \\ 2) & m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0, \\ 3) & m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = M I_2 R^2, \\ 4) & m_1 c_1^3 + m_2 c_2^3 = M I_3 R^3. \end{array}\right\} \tag{2.2.7}$$

Les termes ultérieurs des développements de U et de $U_{(2)}$ resteront différents, mais cela n'a pas beaucoup d'importance car, de toute façon, on ne connaît avec précision que quelques premières constantes I_k, les autres étant très petites et mal connues.

Il suffit donc de choisir les paramètres m_1, m_2, c_1, c_2 dans le problème des deux centres fixes de façon à vérifier les égalités (2.2.7) pour que la fonction de forces $U_{(2)}$, tout en définissant le problème mentionné, soit confondue *en ses termes dominants* avec la fonction de forces U du champ gravitationnel terrestre. Autrement dit, il suffit de « traficoter » un peu le potentiel du champ gravitationnel de la Terre en lui adaptant une nouvelle « queue » (c'est-à-dire en remplaçant les coefficients — très petits — des termes du développement d'indices $k \geqslant 4$ par des coefficients nouveaux mais toujours aussi petits) pour que le problème du mouvement du satellite dans le champ de la Terre (ou d'une autre planète) soit *intégrable*. Le mouvement du point influencé par le potentiel « traficoté » ne différera pas beaucoup de son mouvement sous l'action du potentiel initial, car on tient compte assez fidèlement de l'effet des termes dominants du potentiel. De plus, puisque le problème est intégrable, les formules exactes dégagées après intégration devront tenir compte de l'influence de tous les effets des termes dominants de la fonction de forces du champ gravitationnel terrestre, et pas seulement des effets d'évolution comme précédemment.

Le problème intégrable des deux centres fixes suit donc de très près le problème du mouvement d'un point dans le champ gravitationnel du sphéroïde terrestre, quitte à choisir convenablement les paramètres dans le problème des deux centres. Plus exactement, il faut que les équations (2.2.7) soient vérifiées. Le système (2.2.7) est facile à résoudre algébriquement. Des deux premières équations on déduit

$$m_1 = -\frac{Mc_2}{c_1 - c_2}, \quad m_2 = \frac{Mc_1}{c_1 - c_2}. \tag{2.2.8}$$

Portant (2.2.8) dans les deux autres équations (2.2.7), on obtient

$$c_1 c_2 = -I_2 R^2,$$
$$c_1 c_2 (c_2 + c_1) = -I_3 R^3,$$

ou

$$c_1 c_2 = -I_2 R^2, \quad c_2 + c_1 = \frac{I_3 R}{I_2}. \tag{2.2.9}$$

On voit de là que c_1, c_2 sont racines de l'équation quadratique en c:

$$c^2 - \frac{I_3 R}{I_2} c - I_2 R^2 = 0. \tag{2.2.10}$$

Proposons-nous de résoudre cette équation. Il vient

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= \left(\frac{I_3}{2I_2} + \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_2}\right)^2 + 4I_2}\right)\frac{R}{2}, \\ c_2 &= \left(\frac{I_3}{2I_2} - \sqrt{\left(\frac{I_3}{I_2}\right)^2 + 4I_2}\right)\frac{R}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.11}$$

Portant maintenant (2.2.11) dans (2.2.8), on détermine complètement m_1, m_2, c_1, c_2. Se rappelant les valeurs numériques que prennent I_2 et I_3 ($I_2 \sim -10^3$, $I_3 \sim 10^{-5}$), on se rend compte d'une circonstance surprenante: les distances c_1, c_2 et les masses m_1, m_2 du problème des deux centres s'avèrent être des quantités complexes! Autrement dit, le problème classique s'en trouve généralisé aux masses et distances complexes. Il n'y a cependant rien d'anormal à cela: la fonction de forces restant réelle, il en est de même du mouvement.

Le coefficient I_2 caractérise l'aplatissement de la Terre, et le coefficient I_3, sa dissymétrie par rapport au plan de l'équateur. La dissymétrie en question est si petite ($|I_3/I_2| \sim 10^{-2}$) qu'on peut la négliger. Compte tenu seulement de l'aplatissement de la Terre ($I_3 = 0$), on obtient

$$m_1 = m_2 = \frac{M}{2}, \quad c_1 = iR\sqrt{|I_2|}, \quad c_2 = -iR\sqrt{|I_2|}. \tag{2.2.12}$$

Ainsi donc, le mouvement du satellite dans le champ gravitationnel d'une Terre aplatie et symétrique par rapport à l'équateur se

Terme
dominant
du potentiel
newtonien

laisse interpréter en termes du problème (intégrable) du mouvement d'un point dans le champ à deux sources fixes de même masse, séparées par une distance imaginaire pure (!). (La distance serait réelle si la Terre était allongée au lieu d'être aplatie.) L'analogie entre les deux problèmes mise en évidence par Axionov, Grébénikov et Diomine permet d'interpréter le mouvement du satellite dans le champ gravitationnel de la Terre sous une forme fermée, à savoir au moyen de fonctions elliptiques (voir ci-après). Il convient de noter que le problème classique était traditionnellement considéré en deux dimensions, alors que les trajectoires des satellites sont essentiellement gauches: une raison de plus pour continuer à attaquer le problème des deux centres fixes.

L'analogie entre les deux problèmes était assez difficile à saisir: les chercheurs de différents pays ont mis plusieurs années à la cerner. Pour mettre le problème du mouvement du satellite dans le champ terrestre sous une forme intégrable, J. P. Vinti aux Etats-Unis [2.6], M. Kislik en Union Soviétique [2.5] et autres « traficotaient » le potentiel comme nous venons de le décrire. Mais il fallut attendre les travaux d'Axionov, Grébénikov et Diomine pour que le problème soit bien posé, clairement situé et résolu avec précision. Les cas que nous avons examinés précédemment s'en déduisent comme des cas particuliers. A l'heure actuelle, le problème des deux centres fixes doués de masses complexes et situés à une distance complexe l'un de l'autre est désigné sous le terme de *problème généralisé des deux centres fixes*. Ainsi défini, il continue à attirer les chercheurs (V. Alexeiev [2.7] entre autres).

3. Intégration. Système de coordonnées

Passons à l'intégration du problème. Prenons le cas (2.2.12). Introduisons la notation $c = R\sqrt{|I_2|}$; il vient

$$U_{(2)} = f\frac{M}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z+ic)^2}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-ic)^2}}\right\}. \quad (2.3.1)$$

Tout système de coordonnées ne convient pas à l'intégration des problèmes. Chaque problème concret exige généralement un système de variables particulier, facilitant au maximum l'analyse. Le choix d'un tel système de variables n'est pas toujours facile; il vaut mieux ne pas le faire à la légère, car il détermine le succès (ou l'échec) de l'étude. Dans notre problème, au lieu du système de coordonnées cartésiennes x, y, z, nous introduirons un système de coordonnées curvilignes λ, μ, w, de façon à avoir

$$\left.\begin{aligned} x &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos w,\\ y &= c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin w,\\ z &= c\lambda\mu. \end{aligned}\right\} \quad (2.3.2)$$

Expliquons la signification des nouvelles variables. De (2.3.2) il ressort que

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2+y^2}{c^2(1+\lambda^2)}+\frac{z^2}{c^2\lambda^2}&=1,\\ \frac{x^2+y^2}{c^2(1-\mu^2)}-\frac{z^2}{c^2\mu^2}&=1,\\ \frac{x}{y}&=\operatorname{tg} w. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3.3)$$

On voit que le lieu géométrique des points $\lambda = \text{Cte}$ $(0 \leqslant \lambda < +\infty)$ est un ellipsoïde de révolution aplati dont l'axe de symétrie se confond avec l'axe des z de l'ancien système de coordonnées. Le demi-petit axe de l'ellipsoïde est $c\lambda$, le demi-grand axe $c\sqrt{1+\lambda^2}$ (fig. 2.2). Le lieu géométrique des points $\mu = \text{Cte}$ est un hyperboloïde de révolution à une nappe (son axe de symétrie se confond aussi avec l'axe des z). (Les hyperboloïdes remplissent l'espace tout entier quand μ^2 varie de 0 à 1.) Enfin, $w = \text{Cte}$ $(-\infty < w < +\infty)$ définit un plan qui contient l'axe des z (le plan méridional). Traduits en termes de ces variables, r_1 et r_2 deviennent:

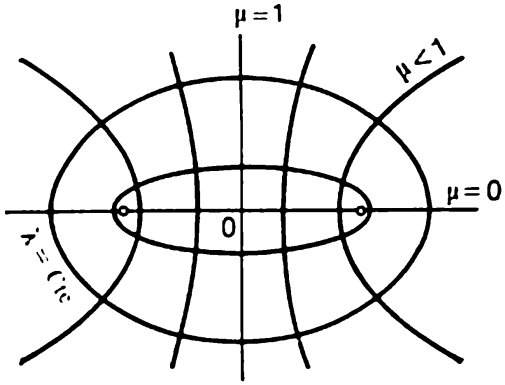


Fig. 2.2. Système de coordonnées elliptiques

$$r_1=\sqrt{x^2+y^2+(z+ic)^2}=c\,(\lambda+i\mu)$$

et

$$r_2=\sqrt{x^2+y^2+(z-ic)^2}=c\,(\lambda-i\mu),$$

d'où

$$U_{(2)}=fM\frac{\lambda}{c\,(\lambda^2+\mu^2)} \qquad (2.3.4)$$

Puisqu'on a toujours $U_{(2)} > 0$, l'ensemble de définition de λ est le suivant: $0 < \lambda < \infty$.

Ecrivant d'après (2.3.2) les expressions des dérivées de x, y, z par rapport au temps en fonction des dérivées $\dot\lambda$, $\dot\mu$, $\dot w$, on obtient l'expression de l'énergie cinétique $T = {}^1/_2(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2)$ en fonction de λ, μ, w, $\dot\lambda$, $\dot\mu$, $\dot w$. Il se trouve que

$$T=\frac{c^2}{2}\left\{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}\dot\lambda^2+\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\dot\mu^2+(1+\lambda^2)(1-\mu^2)\dot w^2\right\}. \qquad (2.3.5)$$

L'énergie totale du mouvement est alors

$$H = T - U_{(2)}. \qquad (2.3.6)$$

4. Méthode de Hamilton-Jacobi

Ici et par la suite, nous aurons besoin de la méthode de Jacobi pour l'intégration des équations de la dynamique. Nous décrirons cette méthode sans déduction, sous sa forme la plus simple, telle qu'elle sera employée dans ce livre. Pour les détails, on peut consulter n'importe quel traité de mécanique analytique ou céleste (par exemple [2.8, 2.9]).

Supposons que l'énergie cinétique soit fonction des coordonnées généralisées (curvilignes) q_1, q_2, q_3 et des vitesses correspondantes $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$:

$$T = T(q_1, q_2, q_3, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3). \tag{2.4.1}$$

Les dérivées partielles

$$p_1 = \partial T/\partial \dot{q}_1, \quad p_2 = \partial T/\partial \dot{q}_2, \quad p_3 = \partial T/\partial \dot{q}_3 \tag{2.4.2}$$

s'appellent alors *impulsions généralisées*. Exprimons les vitesses $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ figurant dans la formule (2.4.2) par l'intermédiaire des impulsions généralisées p_1, p_2, p_3 (supposant que cela soit possible) et portons-les dans l'expression (2.4.1) de l'énergie cinétique. Nous obtenons une nouvelle expression de l'énergie cinétique:

$$\tilde{T} = T(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3).$$

Soit $U(q_1, q_2, q_3)$ la fonction de forces du champ de forces dans lequel se produit le mouvement. U ne dépend pas explicitement du temps. L'énergie totale du mouvement

$$H = \tilde{T} - U$$

sera alors constante:

$$H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = h. \tag{2.4.3}$$

La fonction $H(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3)$ s'appelle *fonction de Hamilton*.

Les équations du mouvement se mettent dans ce cas sous *forme canonique*

$$dq_i/dt = \partial H/\partial p_i, \quad dp_i/dt = -\partial H/\partial q_i \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.4.4}$$

et s'appellent *équations de Hamilton*.

Ecrivons l'équation aux dérivées partielles en remplaçant p_1, p_2, p_3 de (2.4.3) par les dérivées $\partial W/\partial q_1$, $\partial W/\partial q_2$, $\partial W/\partial q_3$:

$$H\left(q_1, q_2\ q_3, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \frac{\partial W}{\partial q_3}\right) = h. \tag{2.4.5}$$

Cette équation s'appelle *équation de Hamilton-Jacobi*. C'est la fonction W qu'on cherche dans (2.4.5). A cet effet, on cherche une solu-

tion de (2.4.5)

$$W(h, \alpha_2, \alpha_3, q_1, q_2, q_3)$$

qui dépende de trois constantes: de h et de deux autres constantes arbitraires α_2, α_3. Si l'on arrive à trouver une telle fonction W, l'intégrale générale du système d'équations canoniques (2.4.4) s'écrira sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial h} = t + \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \\ &\frac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \quad \frac{\partial W}{\partial q_3} = p_3. \end{aligned}\right\} \tag{2.4.6}$$

Ici β_1, β_2, β_3 sont de nouvelles constantes arbitraires. Les formules (2.4.6) établissent la liaison des coordonnées q_1, q_2, q_3 et des impulsions p_1, p_2, p_3 avec le temps t et les six constantes arbitraires h, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3. Ces formules apportent donc une solution complète au problème de dynamique. (Pour achever l'analyse, il reste à définir sous forme explicite, au départ de (2.4.6), les coordonnées et les impulsions en fonction du temps et des constantes arbitraires. C'est une tâche assez difficile dans la plupart des cas.)

5. Intégration

Ecrivons donc, selon la méthode de Hamilton-Jacobi, les impulsions généralisées pour le problème considéré:

$$\left.\begin{aligned} p_\lambda &= \frac{\partial T}{\partial \dot\lambda} = c^2 \frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}\dot\lambda, \\ p_\mu &= \frac{\partial T}{\partial \dot\mu} = c^2 \frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\dot\mu, \\ p_w &= \frac{\partial T}{\partial \dot w} = c^2 (1+\lambda^2)(1-\mu^2)\dot w. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.1}$$

Exprimant ensuite les vitesses en fonction des impulsions et les portant dans l'expression (2.3.5) de T, on obtient une nouvelle expression de l'énergie cinétique:

$$\tilde T = \frac{1}{2c^2}\left\{\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}p_\lambda^2 + \frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}p_\mu^2 + \frac{p_w^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\right\}. \tag{2.5.2}$$

La fonction de Hamilton s'écrit alors

$$H = \tilde T - U, \tag{2.5.3}$$

où $U(\mu, \lambda)$ est définie par (2.3.4). On peut maintenant écrire directement l'équation de Hamilton-Jacobi qui, après multiplication par

$2c^2(\lambda^2+\mu^2)$, devient

$$(1+\lambda^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\lambda}\right)^2+(1-\mu^2)\left(\frac{\partial W}{\partial\mu}\right)^2+\left(\frac{1}{1-\mu^2}-\frac{1}{1+\lambda^2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2=$$
$$=2fMc\lambda+2hc^2(\lambda^2+\mu^2). \qquad (2.5.4)$$

Cherchons une solution convenable de cette équation sous la forme

$$W=W_1(\lambda)+W_2(\mu)+W_3(w) \qquad (2.5.5)$$

et posons

$$dW_3/dw=\alpha_3=\text{Cte} \quad (W_3=\alpha_3 w). \qquad (2.5.6)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi (2.5.4) sera alors vérifiée si

$$(1+\lambda^2)\left(\frac{dW_1}{d\lambda}\right)^2=\frac{1}{1+\lambda^2}\alpha_3^2+2fMc\lambda+2hc^2\lambda^2+2\alpha_2, \qquad (2.5.7)$$

$$(1-\mu^2)\left(\frac{dW_2}{d\mu}\right)^2=-\frac{1}{1-\mu^2}\alpha_3^2+2hc^2\mu^2-2\alpha_2, \qquad (2.5.8)$$

où α_2 est la nouvelle constante. A partir de ces expressions, $W_1(\lambda)$ et $W_2(\mu)$ se définissent aisément par quadratures ; on détermine donc aussi W, qui s'écrit sous la forme

$$W=\int\frac{\sqrt{L(\lambda)}}{1+\lambda^2}\,d\lambda+\int\frac{\sqrt{M(\mu)}}{1+\mu^2}\,d\mu+\alpha_3 w, \qquad (2.5.9)$$

où

$$\left.\begin{aligned} L(\lambda)&=\alpha_3^2+2(1+\lambda^2)(hc^2\lambda^2+fMc\lambda+\alpha_2),\\ M(\mu)&=-\alpha_3^2+2(1-\mu^2)(hc^2\mu^2-\alpha_2).\end{aligned}\right\} \qquad (2.5.10)$$

On pourrait maintenant achever la réduction du problème aux quadratures en se servant des formules (2.4.6). Or, les équations obtenues de cette manière ne sont pas inversibles directement, c'est-à-dire qu'on ne peut pas expliciter les coordonnées dans ces équations. Nous serons donc obligés de nous écarter un peu de la méthode de Hamilton-Jacobi traditionnelle. Appliquons en même temps les expressions (2.4.6) et (2.5.1) des impulsions ; il vient

$$\left.\begin{aligned} p_\lambda&=\frac{\partial W}{\partial\lambda}=\frac{\sqrt{L}}{1+\lambda^2}=c^2\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}\dot\lambda,\\ p_\mu&=\frac{\partial W}{\partial\mu}=\frac{\sqrt{M}}{1-\mu^2}=c^2\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\dot\mu,\\ p_w&=\frac{\partial W}{\partial w}=\alpha_3=c^2(1+\lambda^2)(1-\mu^2)\dot w.\end{aligned}\right| \qquad (2.5.11)$$

Introduisons à présent une nouvelle variable indépendante τ liée à l'ancienne t par la formule

$$dt=c^2(\lambda^2+\mu^2)\,d\tau; \qquad (2.5.12)$$

les équations que nous venons d'écrire nous donnent alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \sqrt{L(\lambda)}, \\ \frac{d\mu}{d\tau} &= \sqrt{M(\mu)}, \\ \frac{dw}{d\tau} &= \alpha_3 \frac{\lambda^2+\mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{2.5.13}$$

Les deux premières équations conduisent immédiatement aux quadratures :

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} = \tau + \beta_\lambda, \quad \int \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \tau + \beta_\mu. \tag{2.5.14}$$

où β_λ, β_μ sont de nouvelles constantes arbitraires. Si l'on arrive à inverser ces quadratures, c'est-à-dire à obtenir les expressions explicites $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$, le second membre de la troisième équation (2.5.13) sera une fonction explicite de τ, si bien que

$$w = \alpha_3 \int \frac{\lambda^2+\mu^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\, d\tau + \beta_w. \tag{2.5.15}$$

Cette formule, jointe aux expressions $\mu(\tau)$ et $\lambda(\tau)$, constitue une représentation paramétrique (τ paramètre) des trajectoires (β_w est une dernière constante arbitraire). Enfin, (2.5.12) nous permet aussi de définir explicitement le temps t en fonction de ce même paramètre :

$$t = c^2 \int (\lambda^2 + \mu^2)\, d\tau, \tag{2.5.16}$$

et le problème est résolu complètement.

6. Domaine des mouvements du satellite

On doit donc tout d'abord inverser les quadratures (2.5.14). Ce n'est pas facile. Puisque les polynômes figurant sous les radicaux sont du quatrième degré, l'inversion peut se faire au moyen de *fonctions elliptiques de Jacobi* mais d'une façon différente dans chaque cas particulier, en fonction des valeurs que prennent les racines des polynômes. On se heurte aussi à des difficultés notables en calculant les racines des polynômes du quatrième degré en fonction des coefficients des polynômes, bien qu'il soit possible de tourner ces difficultés par l'analyse qualitative des trajectoires.

De la définition du système de coordonnées curvilignes, il ressort que l'ensemble de définition des variables est

$$\left.\begin{aligned} -\infty < w < +\infty, \\ 0 \leqslant \lambda < +\infty, \\ -1 \leqslant \mu \leqslant +1; \end{aligned}\right\} \tag{2.6.1}$$

on ne prendra donc en considération, en analysant le mouvement, que les valeurs de λ, μ, w qui tombent dans le domaine (2.6.1). Compte tenu de cette remarque, faisons l'analyse qualitative d'une situation caractéristique du mouvement d'un satellite artificiel.

Supposons que la constante de l'énergie soit $h < 0$. Alors $M(\mu) \to +\infty$ pour $\mu \to \pm\infty$ et $M(\mu) < 0$ pour $\mu = \pm 1$ (on s'en rend compte facilement en regardant le polynôme $M(\mu)$ dans (2.5.10)). Puisque dans un mouvement réel on a toujours $M(\mu) > 0$ et $L(\lambda) > 0$, sans quoi les coordonnées et les vitesses prendraient des valeurs imaginaires, il doit y avoir sur l'intervalle $-1 < \mu < +1$ de définition de μ deux racines réelles μ_1, μ_2. Le polynôme $M(\mu)$ étant bicarré, à chaque racine positive correspond une racine négative de même module. Le polynôme en question est donc de la forme montrée sur la figure 2.3.

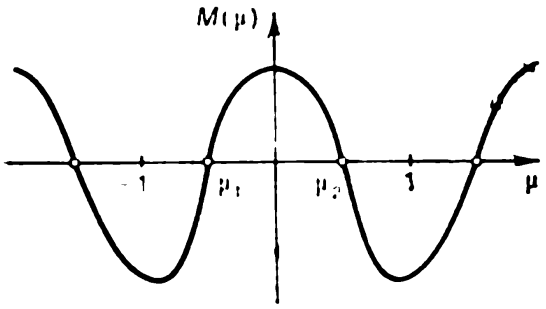


Fig. 2.3. Allure du polynôme $M(\mu)$

On a en mouvement réel $-1 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu \leqslant \mu_2 \leqslant 1$ et $\mu_1 = -\mu_2$; les valeurs de $\mu = \mu_1$ et $\mu = \mu_2$ correspondent à un même hyperboloïde; la valeur négative de μ correspond au mouvement dans le domaine $z < 0$ (hémisphère austral) et la valeur positive, dans le domaine $z > 0$ (hémisphère boréal). On a donc dans le mouvement considéré $\mu^2 \leqslant \mu_1^2 = \mu_2^2$, ce qui correspond au mouvement « en dehors » de l'hyperboloïde $\mu^2 = \mu_1^2 = \mu_2^2$.

Passons au polynôme $L(\lambda)$ (2.5.10). Ecrivons-le sous forme développée:

$$L(\lambda) = 2hc^2\lambda^4 + 2fMc\lambda^3 + (2hc^2 + 2\alpha_2)\lambda^2 + 2fMc\lambda + \alpha_3^2 + 2\alpha_2.$$

Sous la même condition $h < 0$ on a $L \to -\infty$ pour $\lambda \to \pm\infty$.

Il ressort de l'analyse de $M(\mu)$ que $M(0) = -\alpha_3^2 - 2\alpha_2 > 0$, d'où $\alpha_3^2 + 2\alpha_2 < 0$ et à plus forte raison $\alpha_2 < 0$. S'il en est ainsi, tous les coefficients affectant les puissances paires de λ dans $L(\lambda)$ sont alors négatifs (le terme indépendant y compris), tandis que les coefficients des puissances impaires de λ sont positifs. On a donc $L(\lambda) < 0$ pour $\lambda \leqslant 0$. D'après le théorème de Viète le produit de toutes les quatre racines est égal au quotient du terme indépendant par le coefficient qui affecte le terme de plus haut degré:

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = \frac{(\alpha_3^2 + 2\alpha_2)}{2hc^2} > 0,$$

il y a donc ou bien deux racines réelles strictement positives, ou bien quatre. En présence de deux racines réelles (par exemple λ_1 et λ_2), le polynôme $L(\lambda)$ se comporte comme il est montré sur la figure 2.4. On a donc en mouvement réel $L(\lambda) > 0$, ce qui ne peut avoir lieu que si $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$; autrement dit, le mouvement est confiné dans le domaine limité par deux ellipsoïdes $\lambda = \lambda_1$ et $\lambda = \lambda_2$. En présence de quatre racines réelles (fig. 2.5), λ reste toujours, pendant le mouvement, encadré par deux racines quelconques (par exemple λ_1 et λ_2). Faisons le point :

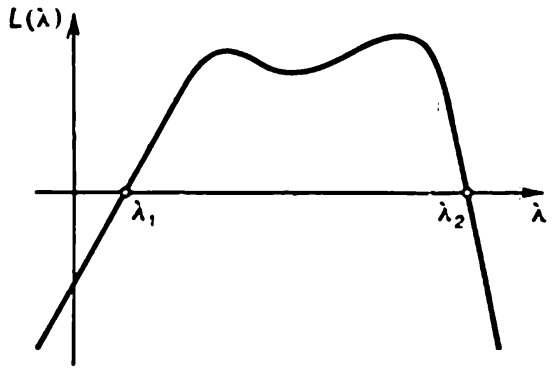


Fig. 2.4. Allure du polynôme $L(\lambda)$ à deux racines réelles

Soumis à la seule condition $h < 0$, le mouvement se produit toujours en dehors de l'hyperboloïde $\mu_2^2 = \mu_*^2$ $(-\mu_* \leqslant \mu \leqslant \mu_*)$ et à l'intérieur du domaine limité par deux ellipsoïdes $\lambda = \lambda_1$ et $\lambda = \lambda_2$ $(0 < \lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2)$, si bien que le domaine du mouvement a la forme d'un anneau ellipsoïdal montré sur la figure 2.6.

On se rend mieux compte de ce résultat en reprenant le tableau de l'évolution du mouvement que nous avions défini approximativement dans les n^os précédents. Rappelons que l'ellipse osculatrice précessionne lentement dans le plan de l'orbite tout en conservant sa forme, si bien que la distance du satellite au centre de la Terre n'est jamais inférieure à r_π ni supérieure à r_α. Or, le plan de l'orbite précessionne lentement lui-même autour de l'axe de la Terre, si bien que l'anneau $r = r_\pi$ engendre une zone sphérique de rayon $r = r_\pi$ et de largeur angulaire $2i$, où i est l'inclinaison de l'orbite sur l'équateur. De même, l'anneau $r = r_\alpha$ engendre sur la sphère de rayon $r = r_\alpha$ une zone sphérique de la même largeur angulaire. L'évolution du mouvement est donc confinée dans un anneau sphéroïdal tel qu'on le voit sur la figure 2.7.

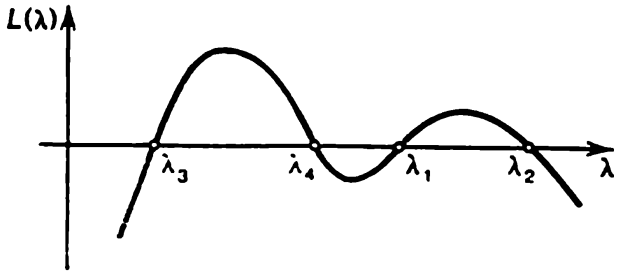


Fig. 2.5. Allure du polynôme $L(\lambda)$ à quatre racines réelles

Cet anneau ressemble beaucoup à la forme exacte du domaine de définition du mouvement (anneau ellipsoïdal) dont nous avons parlé plus haut. Il y a quand même une différence, quoique infime.

En effet, prenons par exemple l'ellipsoïde intérieur. Son excentricité est $\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{1+\lambda_1^2}}$. Or, on déduit de (2.3.2) que $r_{\text{éq}}^2 = c^2 (1 + \lambda^2)$, où $r_{\text{éq}}$ est la distance du satellite au centre de la Terre à l'instant de la traversée du plan équatorial. Donc

$$\varepsilon_1^2 \sim \frac{c^2}{r_{\text{éq}}^2} = \left(\frac{R^2}{r_{\text{éq}}^2}\right) |I_2| < |I_2| \sim 10^{-3}.$$

On voit bien que l'anneau ellipsoïdal ne diffère que très légèrement de l'anneau sphéroïdal.

En analysant tous les cas possibles du mouvement restreint ($h < 0$), on met en évidence non seulement les trajectoires propres

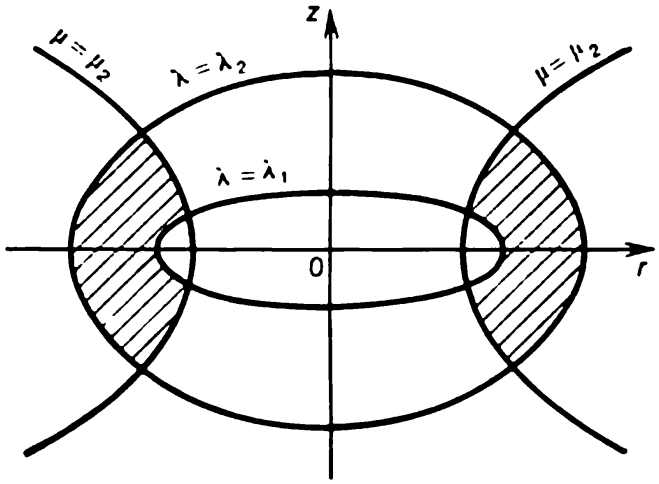


Fig. 2.6. Domaine du mouvement du satellite

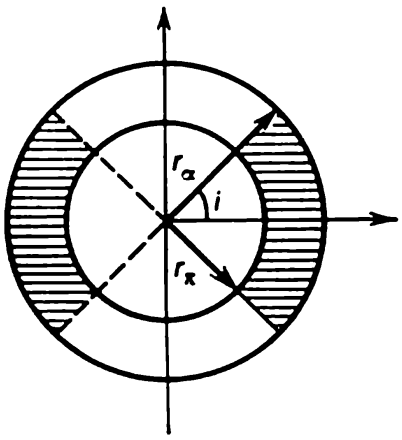


Fig. 2.7. Domaine de l'évolution du satellite

aux satellites entièrement situées au-dessus de la surface du globe terrestre, mais aussi les trajectoires balistiques dont une partie seulement est située au-dessus de la surface : pour ces dernières trajectoires l'ellipsoïde limite intérieur $\lambda = \lambda_1$ est situé au-dessous de la surface de la Terre. Il arrive qu'une trajectoire appartienne tout entière à un ellipsoïde au lieu d'être contenue entre deux ellipsoïdes ; ce cas traduit l'existence des racines multiples du polynôme $L(\lambda)$ (par exemple $\lambda_1 = \lambda_2$).

Sans entrer dans les détails de cette situation (qui ont été décrits pour la première fois dans [2.1]), bornons-nous à un cas particulier qui aide à voir comment l'analyse des problèmes intégrables se trouve poussée jusqu'à « l'avant-dernière étape », c'est-à-dire jusqu'aux formules explicites qui définissent en l'occurrence les fonctions $\lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$. Une fois les formules explicites établies, on passe à une analyse détaillée des propriétés des trajectoires et finalement (« dernière étape ») au calcul numérique.

Pour examiner ce cas particulier, faisons un bref rappel des propriétés des fonctions elliptiques de Jacobi.

7. Fonctions elliptiques de Jacobi

Une intégrale du type

$$\int \frac{dx}{\sqrt{G(x)}},$$

dans laquelle $G(x)$ est un polynôme du troisième ou du quatrième degré. se laisse réduire à une intégrale de la forme

$$F(k, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \overline{F}(k, z), \quad (2.7.1)$$

dite *intégrale elliptique normale de Legendre de première espèce*; le nombre k, $0 \leqslant k \leqslant 1$, est appelé *module de l'intégrale elliptique*. L'intégrale définie

$$K(k) = F\left(k, \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.7.2)$$

s'appelle *intégrale totale de première espèce*. C'est une fonction strictement croissante de l'argument; on a $K(0) = \pi/2$, $K(1) = \infty$. La fonction $K(k)$ est tabulée; si k est petit, il est commode d'employer le développement

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \left[\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\right]^2 k^{2n} + \ldots \right\}. \quad (2.7.3)$$

La double factorielle symbolise ici comme d'ordinaire le produit de tous les nombres impairs (resp. pairs) de 1 à $2n - 1$ (resp. à $2n$) inclus.

Introduisons la notation

$$u = F(k, \varphi). \quad (2.7.4)$$

La courbe de la figure 2.8 illustre la variation de u en fonction de φ pour quelques valeurs de k. Le problème de l'inversion de l'intégrale elliptique consiste à substituer la fonction inverse φ de u à la fonction connue u de φ. La quantité φ, définie en fonction de u et de k par (2.7.4), s'appelle *amplitude* de u et se note

$$\varphi = \operatorname{am} u. \quad (2.7.5)$$

Le sinus de l'amplitude s'appelle *sinus elliptique* et se note

$$\operatorname{sn} u = \sin(\operatorname{am} u). \quad (2.7.6)$$

On définit d'une façon analogue le *cosinus elliptique*:

$$\operatorname{cn} u = \cos(\operatorname{am} u). \quad (2.7.7)$$

On introduit enfin la fonction

$$\mathrm{dn}\, u = \sqrt{1 - k^2\, \mathrm{sn}^2\, u} \tag{2.7.8}$$

dite *delta d'amplitude*. Les fonctions sn u, cn u, dn u sont appelées *fonctions elliptiques de Jacobi*.

Bon nombre de problèmes de mécanique, à commencer par le mouvement d'un pendule, se résolvent au moyen de fonctions de Jacobi. De même, les problèmes de dynamique du vol spatial qui font l'objet du présent essai et de l'essai suivant conduisent aussi aux fonctions

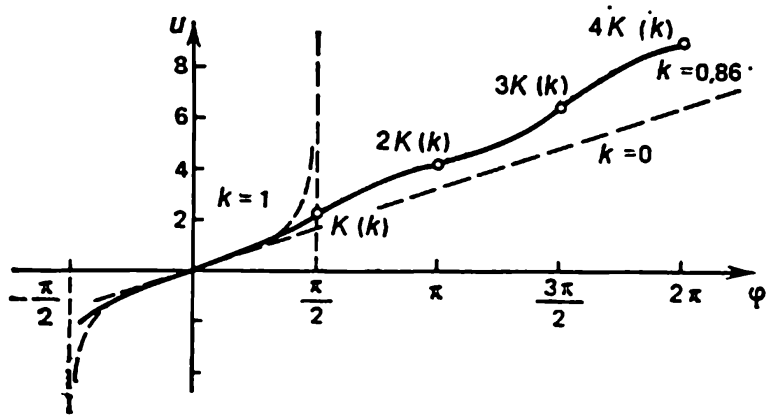


Fig. 2.8. Fonction u (φ)

elliptiques de Jacobi. Les propriétés du sinus et du cosinus elliptiques ne sont pas sans rappeler celles des fonctions sinus et cosinus ordinaires. On ne doit cependant pas oublier que toute fonction elliptique dépend de deux arguments u, k. On omet généralement d'indiquer k, mais la fonction en dépend toujours! Les fonctions sn u, cn u sont périodiques de période $4K$ (k), et la fonction dn u, périodique de période $2K$ (k); les valeurs de sn u et cn u sont dans l'intervalle $[-1, +1]$, celles de dn u, dans l'intervalle $[\sqrt{1-k^2}, +1]$.

Le tableau suivant contient quelques valeurs des fonctions elliptiques:

u	0	K	$2K$	$3K$	$4K$
sn u	0	1	0	—1	0
cn u	1	0	—1	0	1
dn u	1	$\sqrt{1-k^2}$	1	$\sqrt{1-k^2}$	1

On voit sur la figure 2.9 les courbes représentatives des fonctions sn u, cn u, dn u pour quelques valeurs de k. La quantité $K(k)$ joue le même rôle pour les fonctions elliptiques que la quantité $\pi/2$ pour les fonctions trigonométriques. Or, comme nous l'avons déjà dit, K est susceptible de prendre toute valeur numérique sur l'intervalle $\pi/2 \leqslant K < \infty$, en fonction de la valeur du module k. La période du sinus et du cosinus elliptiques peut varier donc librement entre

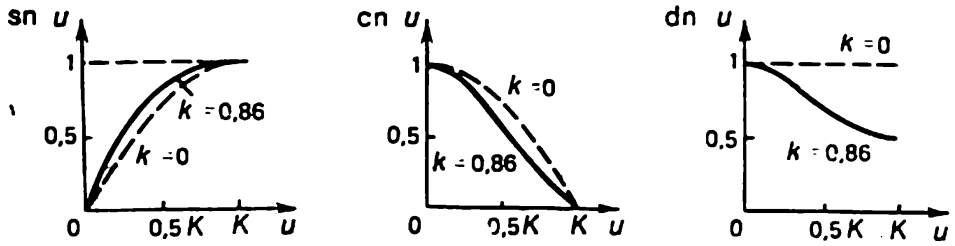


Fig. 2.9. Fonctions sn u, cn u, dn u

2π et ∞. Pour $k = 0$ les fonctions elliptiques se dégénèrent en fonctions trigonométriques de période 2π:

$$k = 0, \quad \operatorname{sn} u = \sin u, \quad \operatorname{cn} u = \cos u, \quad \operatorname{dn} u = 1.$$

Pour $k = 1$ les fonctions elliptiques se laissent exprimer au départ de fonctions non périodiques, à savoir des fonctions hyperboliques:

$$k = 1, \quad \operatorname{sn} u = \operatorname{th} u, \quad \operatorname{cn} u = (\operatorname{ch} u)^{-1}, \quad \operatorname{dn} u = (\operatorname{ch} u)^{-1}.$$

Notons quelques propriétés utiles des fonctions elliptiques de Jacobi:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u, \\ &\operatorname{dn}(-u) = \operatorname{dn} u, \\ &\operatorname{sn}(2K-u) = \operatorname{sn} u, \qquad \operatorname{cn}(2K-u) = -\operatorname{cn} u, \\ &\operatorname{dn}(2K-u) = \operatorname{dn} u, \quad \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \\ &\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{sn}^2 u = 1, \quad \operatorname{dn}^2 u - k^2 \operatorname{cn}^2 u = 1 - k^2. \end{aligned}\right\} \tag{2.7.9}$$

Notons aussi les formules de dérivation:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \\ &\frac{d}{du} \operatorname{cn} u = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, \\ &\frac{d}{du} \operatorname{dn} u = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u. \end{aligned}\right\} \tag{2.7.10}$$

Maintenant nous pouvons envisager un cas particulier intéressant du mouvement d'un satellite.

8. Mouvement d'un satellite polaire de la Terre

Considérons les formules (2.5.13) et (2.5.10). Si $\alpha_3 = 0$, on a $dw/d\tau = 0$, $w = w_0$; le mouvement se produit dans le plan méridional fixe. Dans ce mouvement

$$L(\lambda) = -2|h|\,c^2(1+\lambda^2)\left[\lambda^2 - \frac{fM}{|h|\,c}\lambda + \frac{1}{c^2}\left|\frac{\alpha_2}{h}\right|\right], \tag{2.8.1}$$

$$M(\mu) = -2\,|h|\,c^2(1-\mu^2)\left(\mu^2 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{\alpha_2}{h}\right|\right). \tag{2.8.2}$$

On déduit de (2.5.14) que

$$\tau + \beta_\mu = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{2|\alpha_2|\,(1-\mu^2)\left(1 - c^2\left|\frac{h}{\alpha_2}\right|\mu^2\right)}}.$$

Introduisons les notations

$$u = \sqrt{2|\alpha_2|}\,(\tau + \beta_\mu), \quad c^2\left|\frac{h}{\alpha_2}\right| = k_\mu^2.$$

Il vient

$$u = \int_0^\mu \frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(1-k_\mu^2\mu^2)}}.$$

En analysant le polynôme $M(\mu)$ sous sa forme générale, on remarque (voir fig. 2.3) que, de ses quatre racines réelles, deux sont inférieures ou égales à 1 en module et les deux autres strictement supérieures à 1. Donc $\frac{1}{c^2}\left|\frac{\alpha_2}{h}\right| > 1$ et $k_\mu < 1$. Il y a plus: k_μ^2 est de l'ordre du carré de l'aplatissement de la Terre, $k_\mu^2 \sim I_2^2$. En effet,

$$|h| \sim V^2, \quad |\alpha_2| \sim \left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 \sim \left\{\frac{d\left(\frac{R}{c}\right)}{\frac{dt}{R^2}}\right\}^2,$$

d'où

$$c^2\left|\frac{h}{\alpha_2}\right| \sim \frac{c^4}{R^4} = I_2^2.$$

Or, si $k < 1$, cette dernière intégrale devient une intégrale elliptique de première espèce écrite sous sa forme normale de Legendre; on peut donc écrire immédiatement

$$\mu = \operatorname{sn}\left[\sqrt{2|\alpha_2|}\,(\tau + \beta_\mu)\right]. \tag{2.8.3}$$

La coordonnée μ aura comme période en τ

$$T_\mu = \frac{4K(k_\mu)}{\sqrt{2|\alpha_2|}}.$$

Considérons à présent la coordonnée $\lambda(\tau)$. Le polynôme $L(\lambda)$ (2.8.1) admet comme racines réelles

$$\lambda_1 = \frac{fM}{2|h|c} - \sqrt{\left(\frac{fM}{2|h|c}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{\alpha_2}{h}\right|},$$

$$\lambda_2 = \frac{fM}{2|h|c} + \sqrt{\left(\frac{fM}{2|h|c}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left|\frac{\alpha_2}{h}\right|},$$

et l'intégrale étudiée se laisse mettre sous la forme

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2+1)(\lambda_2-\lambda)(\lambda-\lambda_1)}} = \sqrt{2c^2|h|}\,(\tau+\beta_\lambda). \qquad (2.8.4)$$

Sa réduction à la forme normale est moins facile. Omettant les transformations intermédiaires, écrivons le résultat final:

$$\lambda = \frac{A+B\,\mathrm{cn}\,\sigma(\tau+\beta_\lambda)}{C+D\,\mathrm{cn}\,\sigma(\tau+\beta_\lambda)}, \qquad (2.8.5)$$

où

$$A = \lambda_2 - \lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_2^2+1}{\lambda_1^2+1}}, \qquad B = \lambda_2 + \lambda_1\sqrt{\frac{\lambda_2^2+1}{\lambda_1^2+1}},$$

$$C = 1 - \sqrt{\frac{\lambda_2^2+1}{\lambda_1^2+1}}, \qquad D = 1 + \sqrt{\frac{\lambda_2^2+1}{\lambda_1^2+1}},$$

$$\sigma = \sqrt{2c^2|h|\sqrt{(\lambda_1^2+1)(\lambda_2^2+1)}}.$$

La fonction $\lambda(\tau)$ aura donc comme période en τ

$$T_\lambda = \frac{4K(k_\lambda)}{\sigma},$$

avec

$$k_\lambda^2 = \frac{1}{4}\,\frac{(\lambda_2-\lambda_1)^2 - [\sqrt{\lambda_2^2+1} - \sqrt{\lambda_1^2+1}]^2}{\sqrt{(\lambda_2^2+1)(\lambda_1^2+1)}}.$$

Puisque $T_\lambda \neq T_\mu$, le mouvement est apériodique. Lorsque λ atteint sa valeur initiale, μ se trouve légèrement « décalée », la trajectoire prenant en résultat une forme caractéristique en rosace (fig. 2.10). La différence $T_\lambda - T_\mu$ définit la vitesse du mouvement du demi-grand axe de l'ellipse osculatrice de l'orbite.

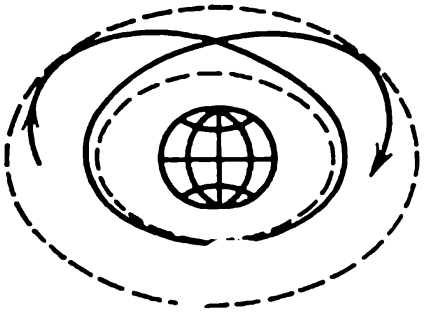


Fig. 2.10. Trajectoire d'un satellite polaire

Notons l'existence d'orbites presque (ou quasi) circulaires $\lambda = \mathrm{Cte}$ qui répondent à l'égalité $\lambda_1 = \lambda_2$.

Cela suffit probablement à se faire une idée du problème; pour plus de détails, nous conseillons au lecteur les ouvrages de fond dont on trouve la liste complète dans le livre de V. Diomine [2.3].

TROISIÈME ESSAI

ENCORE UN VIEUX PROBLÈME QUI REVIENT À LA VIE

> Un homme cultivé se contente de ronger très légèrement son os avant de le jeter sous la table.
>
> *Fafik* *)

1. Quel est ce problème ?

Ce problème est le suivant. Soit un point matériel, mobile dans le champ gravitationnel d'un centre d'attraction newtonienne; supposons qu'il subit une accélération « perturbatrice » constante en grandeur et en direction (fig. 3.1). Ce problème remonte à Lagrange; au XIXe siècle il fut discuté par Célérier et Saint-Germain, ainsi que par le mécanicien russe I. Mechtcherski. Ils montrèrent que le problème est intégrable par quadratures mais ne poussèrent pas sa solution jusqu'au bout, car leurs quadratures se prêtaient mal à l'inversion. Le problème fut ultérieurement jeté sous la table et probablement abandonné.

Intégrable mais à moitié oublié, le problème revint à la vie dans les années soixante du vingtième siècle. Et voici pourquoi. Pour les vols spatiaux qui peuvent devenir réalisables dans un proche avenir, on met au point des moteurs dits à faible poussée (propulsion ionique, plasmatique, etc.), dont le rôle consiste à imprimer au vaisseau une très petite accélération de poussée pendant un temps très long (nous en reparlerons plus en détail dans les autres essais). On peut imaginer un cas où le propulseur fournit une accélération constante en grandeur et en direction : le mouvement du vaisseau spatial s'inscrit alors dans le problème classique de Célérier-Saint-Germain.

Autre application importante: l'étude de l'influence qu'exerce la pression de radiation sur la trajectoire d'un satellite. On sait que le rayonnement solaire exerce une pression faible mais appréciable sur la surface éclairée des corps; pour certains satellites la pression de radiation est la principale source des perturbations. Tel est le cas des satellites américains *Echo* qui représentent de gros ballons (30

---

*) Chien terrier, collaborateur au magazine humoristique polonais *Przekrôt*. Ses aphorismes sont publiés systématiquement sous la rubrique « Pensées des grands hommes, des hommes moyens et du chien Fafik ».

à 40 mètres de diamètre) gonflés de gaz. A cause de leur petite masse et de leur surface étendue, ils sont très sensibles à l'effet perturbateur de la lumière. Dans un intervalle de temps (relativement) court, tant que le Soleil reste à peu près immobile dans son mouvement annuel par rapport à la sphère céleste, on peut admettre que la pression de radiation engendre une accélération constante en grandeur et en

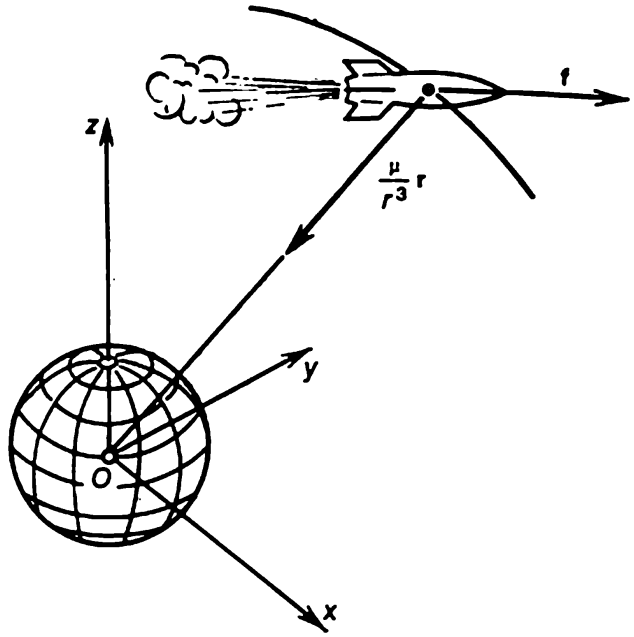


Fig. 3.1. Schéma des forces en jeu

direction (du Soleil vers l'objet). On retrouve donc un modèle de mouvement décrit par le problème classique.

Il n'est pas étonnant que, depuis une vingtaine d'années, le problème du mouvement dans le champ newtonien en présence d'un vecteur accélération additionnel constant soit retiré des coffres de l'oubli et nettoyé de la poussière des siècles [3.1-3.6]. L'exposé qui suit reprend essentiellement les idées des travaux [3.1, 3.2] de l'auteur.

2. Quelques mots sur les équations du mouvement et sur leur intégration

Construisons un système de coordonnées $Oxyz$ d'origine au centre newtonien O (fig. 3.1) et introduisons des variables sans dimension définies par les formules

$$\{r\}=\{r_R\}/r_0, \quad \{v\}=\{V_R\}/\sqrt{r_0 g_0},$$
$$t=t_R/\sqrt{r_0/g_0}, \quad \{f\}=\{f_R\}/g_0,$$

où r_0 est une distance fixe (par exemple initiale) au centre d'attraction ; $g_0 = \mu/r_0^2$, l'accélération de la force d'attraction à la distance r_0 du centre ; $\{r\}$, $\{v\}$, $\{f\}$, t sont des grandeurs sans dimension, à savoir : les coordonnées, les composantes de la vitesse, les composantes de l'accélération de poussée, le temps ; $\{r_R\}$, $\{V_R\}$, $\{f_R\}$, t_R, les grandeurs analogues avec dimension.

Dirigeons l'axe des x du système de coordonnées fixe suivant le vecteur accélération de poussée constant **f**. Les équations du mouvement s'écriront alors

$$\ddot{x} = -x/r^3 + f, \qquad \ddot{y} = -y/r^3, \quad \ddot{z} = -z/r^3, \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{3.2.1}$$

Sans la quantité f dans le second membre de la première équation, elles ne seraient autres que les équations différentielles du mouvement képlérien. La présence du paramètre f entraîne, comme nous le verrons, une variété fantastique de mouvements.

Les équations (3.2.1) admettent trois intégrales premières :

— l'intégrale de la demi-force vive

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - \frac{1}{r} - fx = h; \tag{3.2.2}$$

— l'intégrale des aires

$$z\dot{y} - y\dot{z} = -k_0 \tag{3.2.3}$$

(par rapport à l'axe des x, c'est-à-dire à la direction du vecteur accélération **f**) ;

— une intégrale de synthèse, dite intégrale laplacienne du mouvement képlérien,

$$\dot{x}r\dot{r} - \frac{x}{r} - \frac{3}{2}fx^2 - \frac{1}{2}fr^2 - 2hx = c. \tag{3.2.4}$$

Nous en aurons besoin plus tard. Pour l'instant, contentons-nous de noter que l'existence d'un nombre suffisant (trois en l'occurrence) d'intégrales premières est la condition d'intégrabilité des équations du mouvement. Il est donc utile, en procédant à l'intégration, de dégager si possible toutes les intégrales premières du système qui sont indépendantes, c'est-à-dire qui ne se déduisent pas l'une de l'autre. L'existence de trois intégrales premières (3.2.2)-(3.2.4) permet de réduire le problème aux quadratures.

On pourrait bien sûr, quitte à introduire un système convenable de coordonnées curvilignes, faire l'intégration par la méthode de Hamilton-Jacobi comme nous l'avons fait dans le problème des deux centres fixes. Or, les trois intégrales premières ci-dessus permettent de faire l'intégration directement, en les transformant d'une

façon convenable. En effet, introduisons deux nouvelles variables

$$u = r - x, \quad v = r + x, \tag{3.2.5}$$

telles que

$$r = \frac{1}{2}(u+v), \quad x = \frac{1}{2}(u-v), \tag{3.2.6}$$

et une troisième variable φ telle que

$$\cos\varphi = y/r_1, \quad \sin\varphi = z/r_1, \quad r_1 = \sqrt{y^2+z^2}. \tag{3.2.7}$$

Substituons les nouvelles variables u, v, φ définies par (3.2.5)-(3.2.7) à x, y, z dans les intégrales premières (3.2.2)-(3.2.4) et remplaçons le temps t par un paramètre τ qui croît de façon monotone dans le temps,

$$d\tau = dt/r. \tag{3.2.8}$$

On arrive alors sans peine à expliciter les dérivées $du/d\tau$, $dv/d\tau$, $d\varphi/d\tau$ dans les intégrales (3.2.2)-(3.2.4), après quoi on termine l'intégration par une quadrature. Sans montrer la « cuisine » de l'intégration, citons seulement les résultats finaux.

Il se trouve que le mouvement est régi par les quadratures

$$\int \frac{dv}{\sqrt{V(v)}} = \tau + c_1, \quad \int \frac{du}{\sqrt{U(u)}} = \tau + c_2 \tag{3.2.9}$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{aligned} V(v) &= fv^3 + 2hv^2 + 2(1+c)v - k_0^2, \\ U(u) &= -fu^3 + 2hu^2 + 2(1-c)u - k_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{3.2.10}$$

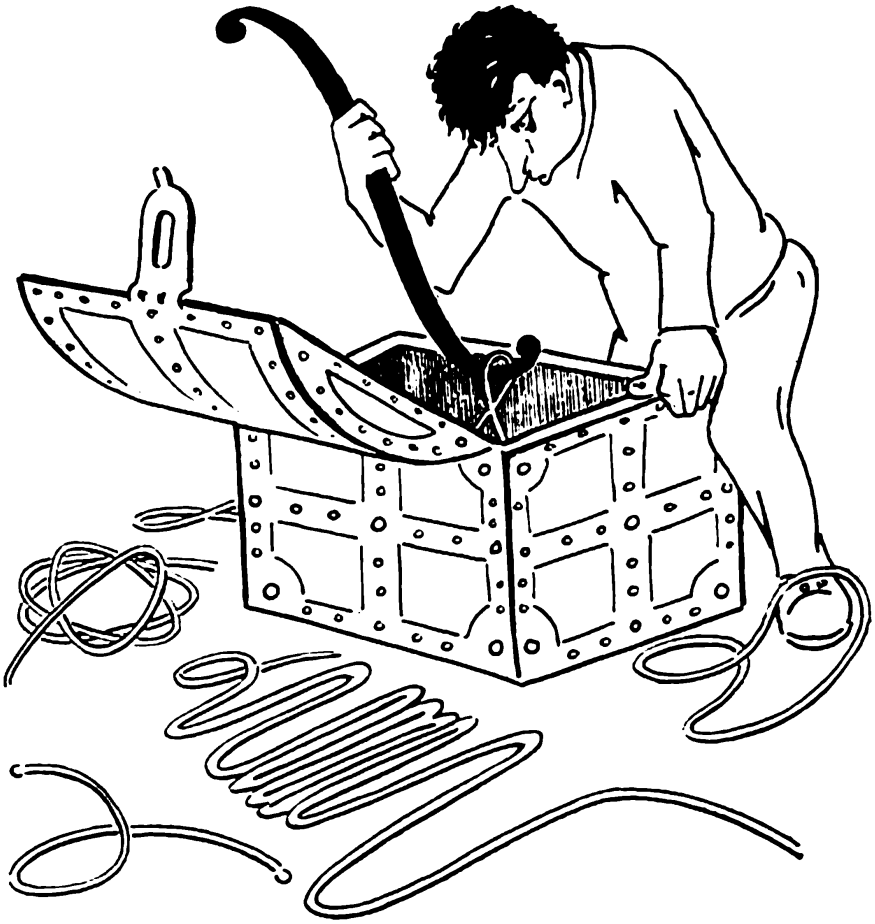
On sait que les intégrales du type (3.2.9) se laissent inverser au moyen des fonctions elliptiques de Jacobi. Par l'inversion de ces intégrales on obtient les équations paramétriques de la trajectoire dans un plan tournant qui contient le rayon vecteur r et l'axe des x. L'angle de rotation φ de ce plan autour de l'axe des x se définit, conformément à (3.2.3) et (3.2.7), par la formule

$$\varphi - \varphi_0 = k_0 \int_0^\tau \frac{r\,d\tau}{r^2 - x^2} \tag{3.2.11}$$

dans laquelle r et x sont naturellement considérés comme des fonctions connues de τ (en vertu de (3.2.6) et des intégrales (3.2.9) inversées). Nous voyons que φ varie de façon monotone suivant τ. De (3.2.8) on déduit que

$$t - t_0 = \int_0^\tau r\,d\tau, \tag{3.2.12}$$

et le problème est entièrement réduit aux quadratures.



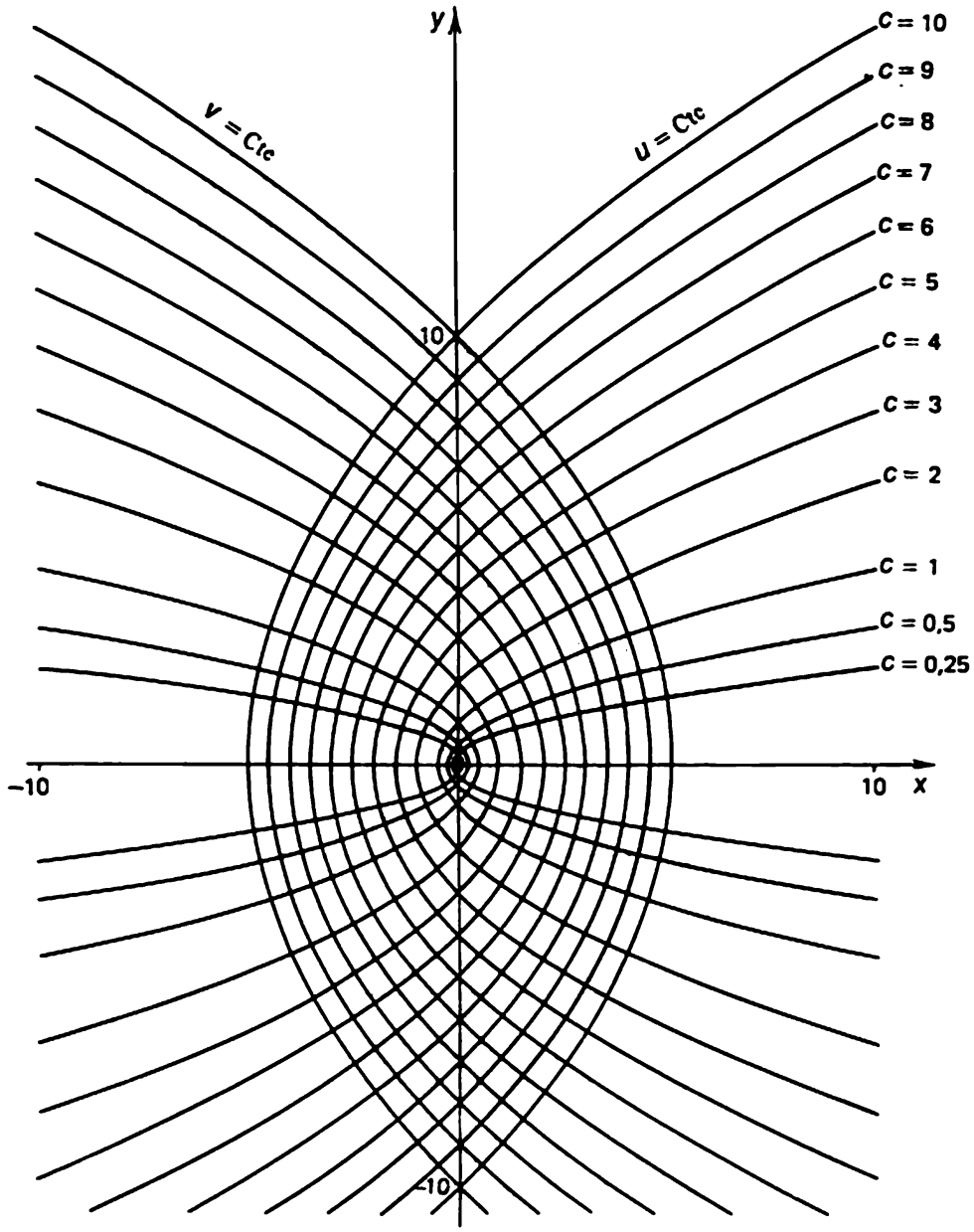


Fig. 3.2. Système de coordonnées paraboloïdales

Notons que le système de coordonnées curvilignes u, v, φ introduit pour l'intégration est paraboloïdal. Les surfaces de coordonnées $u = \text{Cte}$, $v = \text{Cte}$ sont des paraboloïdes de révolution dont l'axe commun se confond avec l'axe des x du système cartésien. Dans le plan $\varphi = \text{Cte}$, le réseau des coordonnées est défini par deux familles de paraboles $u = \text{Cte}$, $v = \text{Cte}$, ainsi qu'il est montré sur la figure 3.2.

On peut affirmer que les coordonnées du paraboloïde de révolution sont les mieux adaptées au problème considéré. En effet, dès

que l'on s'éloigne suffisamment du centre d'attraction, on a $f \gg \gg 1/r^2$ (car f est constant et $1/r^2$ peut devenir aussi petit que l'on veut). Le mouvement qui se produit dans ces conditions est donc très voisin d'un mouvement sous l'action du seul vecteur accélération constant f (l'accélération newtonienne $1/r^2$ devenant négligeable). Or, on sait que le mouvement dans un champ de forces homogène (f = Cte) se produit suivant une parabole dont l'axe se confond avec la direction de f.

3. Mouvement plan

Nous nous bornerons, dans le texte qui suit, à considérer le cas de mouvement dans le plan x, y. On a alors $k_0 = 0$ et $\varphi = \varphi_0$. Les polynômes (3.2.10) se laissent écrire ainsi:

$$\left.\begin{aligned} V &= fv\,(v-v_2)\,(v-v_3), \\ U &= -fu\,(u-u_2)\,(u-u_3), \end{aligned}\right\} \qquad (3.3.1)$$

et admettent comme racines

$$v_1 = 0,$$

$$v_2 = \frac{-h+\sqrt{h^2-2f\,(1+c)}}{f},$$

$$v_3 = \frac{-h-\sqrt{h^2-2f\,(1+c)}}{f},$$

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \frac{h+\sqrt{h^2+2f\,(1-c)}}{f},$$

$$u_3 = \frac{h-\sqrt{h^2+2f\,(1-c)}}{f}.$$

Le problème plan a donc l'avantage indiscutable d'expliciter sans difficulté toutes les racines des polynômes (3.3.1) (donc, aussi, les modules des fonctions elliptiques et les autres paramètres du mouvement) en fonction des conditions initiales, à l'aide des valeurs des constantes h, c. Pour cette raison, il est commode de faire la classification des mouvements dans le plan h, c pour une valeur fixée non nulle de f. Une telle classification est facile à établir, car, répétons-le, les coordonnées u, v sont des fonctions explicites connues de τ et des constantes h, c, à savoir:

$$u\,(\tau,\ h,\ c);\quad v\,(\tau,\ h,\ c).$$

Or, ces fonctions, exprimées en termes de fonctions elliptiques de Jacobi, sont différentes suivant les cas (d'ailleurs nombreux). Omettant les détails que le lecteur peut trouver dans [3.1, 3.2], donnons

tout de suite les résultats de l'analyse. Pour caractériser les trajectoires, il importe seulement de savoir que les trajectoires sont définies par des combinaisons de fonctions $u(\tau)$, $v(\tau)$ montrées schématiquement sur la figure 3.3. La diversité des types de fonctions tient à ce que, pour h et c différents, les racines u, v des polynômes (3.3.1)

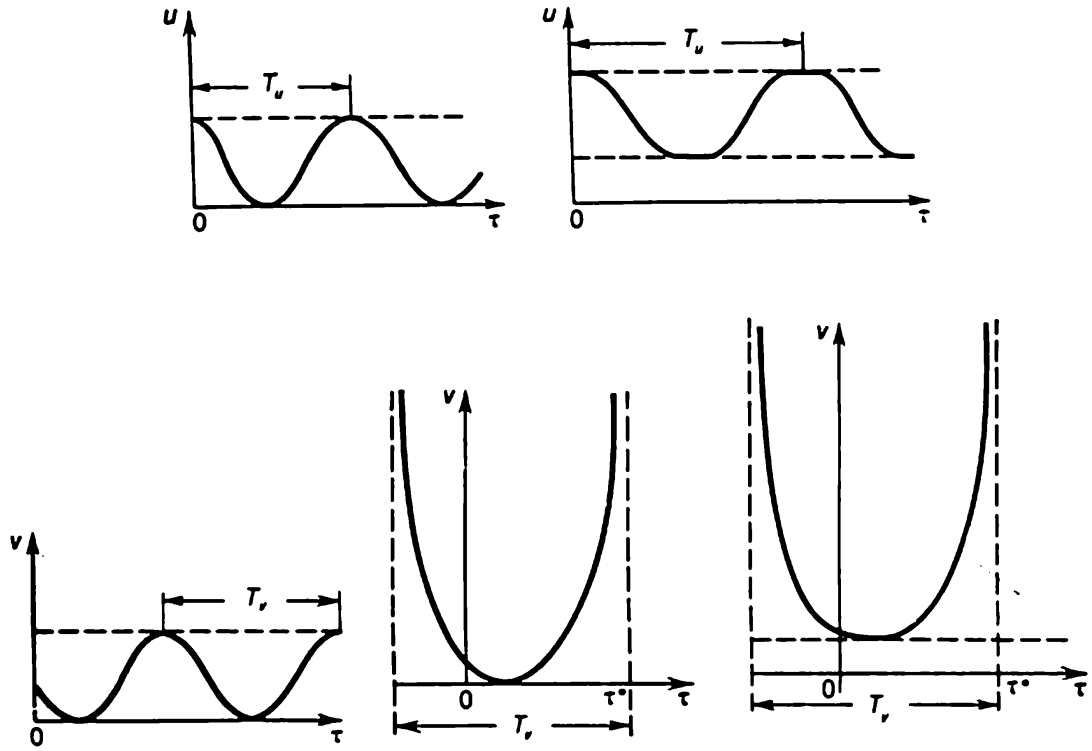


Fig. 3.3. Les cas possibles de $u(\tau)$, $v(\tau)$

peuvent être positives et négatives, réelles et complexes. Remarquons en outre que si $v(\tau)$ tend vers l'infini pour $\tau \to \tau^*$, le temps réel t tend lui aussi vers l'infini pour $\tau \to \tau^*$, si bien que v ne prend une valeur infinie qu'au bout d'un temps infini.

On distingue deux cas qualitativement différents pour $u(\tau)$ et trois pour $v(\tau)$ (fig. 3.3). Quant à l'allure de la trajectoire, elle est complètement définie par les deux questions suivantes:

1° laquelle des six combinaisons possibles de $u(\tau)$, $v(\tau)$ (fig. 3.3) a lieu?

2° quel est le rapport des périodes T_u/T_v des fonctions $u(\tau)$, $v(\tau)$?

Puisque $u(\tau)$, $v(\tau)$ s'écrivent sous forme explicite au moyen des fonctions de Jacobi, on arrive toujours à donner des réponses aux questions 1° et 2°.

4. Classification des trajectoires du mouvement plan

Ces trajectoires peuvent être classées en quatre types principaux :

T y p e I. Trajectoire non bornée, avec des points doubles, n'entourant pas le centre d'attraction. Ses paramètres prennent leurs valeurs dans le domaine

$$c < -1.$$

T y p e II. Trajectoire non bornée, avec des points doubles, entourant le centre d'attraction. Ses paramètres ont leurs valeurs dans le domaine

$$-1 < c < +1, \quad \frac{h}{\sqrt{f}} > -\sqrt{2(1+c)}.$$

T y p e III. Trajectoire non bornée, sans points doubles. Le domaine des valeurs des paramètres est

$$c > 1, \quad \frac{h}{\sqrt{f}} > \sqrt{-2(1-c)}.$$

T y p e IV. Trajectoire bornée. Une telle trajectoire est définie pour

$$-1 < c < +1, \quad \frac{h}{\sqrt{f}} < -\sqrt{2(1+c)}.$$

Il peut y avoir aussi dans ce domaine des trajectoires de type I.

Dans le reste du plan c, $h/\sqrt{f}$ (à savoir : $c > 1$ et $h/\sqrt{f} < \sqrt{-2(1-c)}$) il n'y a aucun mouvement réel. Le partage du plan en domaines I, II, III, IV est montré sur la figure 3.4. On y remarque également quelques schémas simplifiés des trajectoires qui sont possibles dans la partie donnée du plan c, $h/\sqrt{f}$.

Passons à l'étude des propriétés des trajectoires à l'intérieur et aux frontières des domaines I à IV. Nous ne considérerons que les trajectoires les plus intéressantes.

Trajectoires de type I. Elles sont non bornées et, pour $t \to \infty$, tendent vers une parabole $u = u^*$; elles n'entourent pas le centre d'attraction et sont assez « douces » ; lorsque c devient élevé en module, elles ressemblent à des arcs de largeur arbitraire (parfois très étroits). Certaines trajectoires sont de véritables navettes : elles conduisent à un certain point (u_k, v_k) où la vitesse s'annule, mais non les forces ; l'équilibre n'est pas atteint, et *le mouvement reprend à partir du point* (u_k, v_k) *suivant la même trajectoire mais dans le sens inverse* ! C'est un peu comme si, en suivant un sentier, on aboutissait à une impasse : on serait bien obligé de se dire « Demi-tour ! » et de parcourir le même sentier dans le sens inverse... Deux vaisseaux spatiaux lancés suivant une telle trajectoire à des instants différents

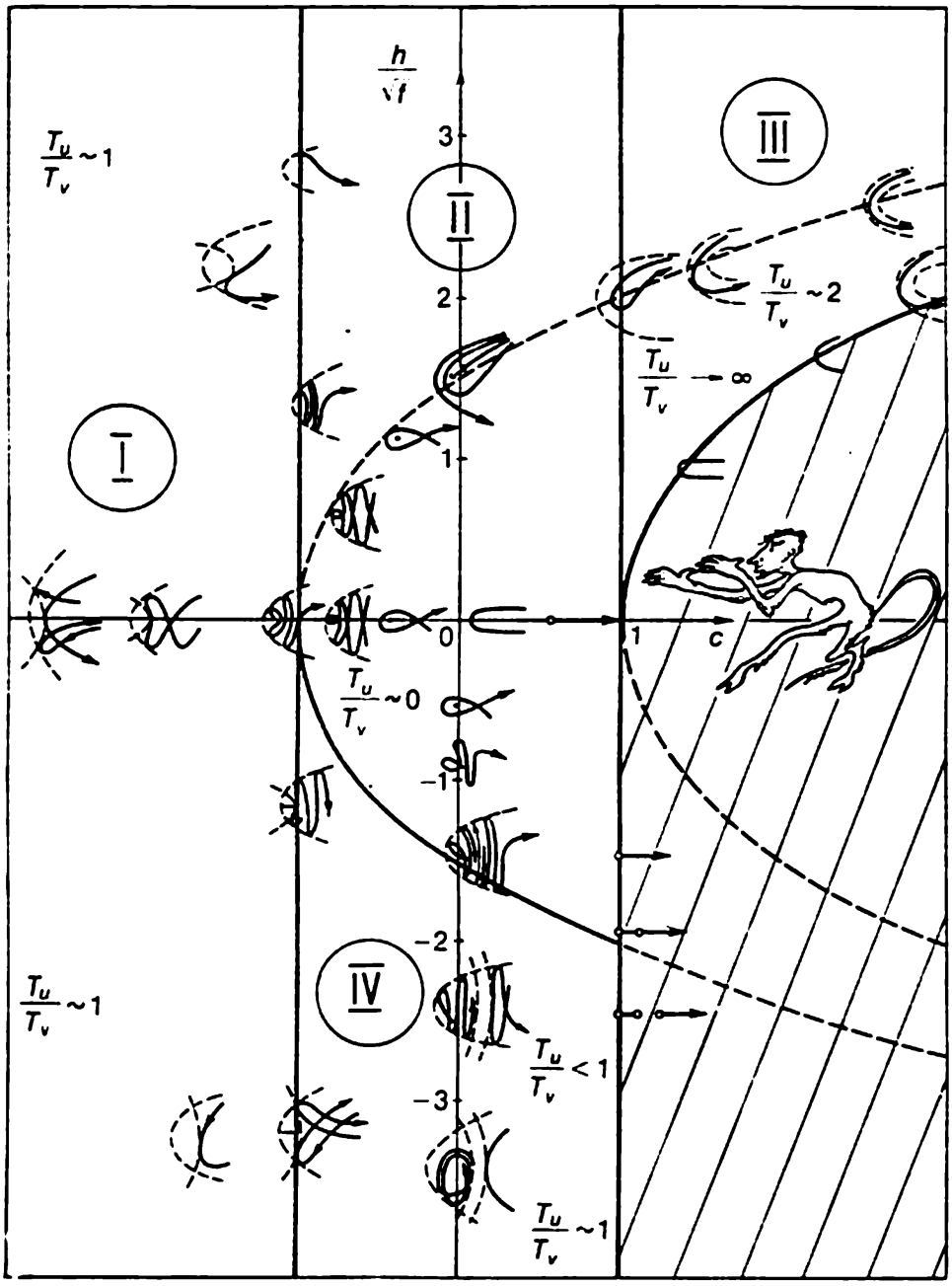


Fig. 3.4. Partage du plan c, $h/\sqrt{f}$ en domaines I, II, III, IV et représentation symbolique des trajectoires

finiront par entrer en collision! (Cet exemple est purement mathématique. En réalité les pilotes auront largement le temps de changer l'intensité ou la direction de la poussée f et de se croiser sans problème, mais ceci est une autre question.) Les trajectoires que nous venons de décrire sont représentées sur la figure 3.5. Si c n'est pas grand, la trajectoire peut avoir des points doubles (fig. 3.6) ou même prendre l'allure d'un serpent (fig. 3.7).

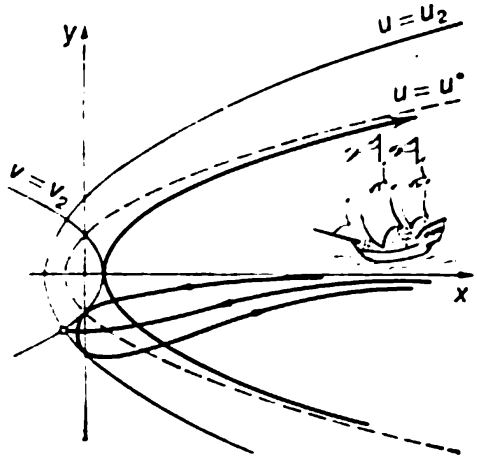


Fig. 3.5. Trajectoires de type I

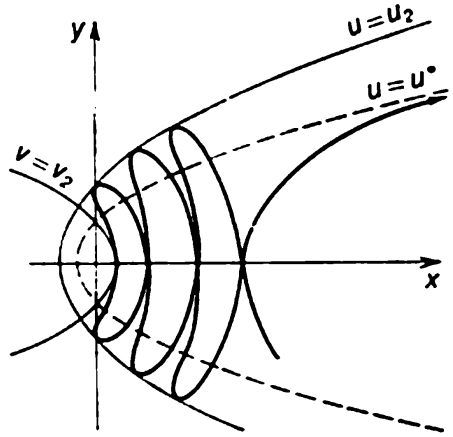


Fig. 3.6. Trajectoire de type I avec des points doubles

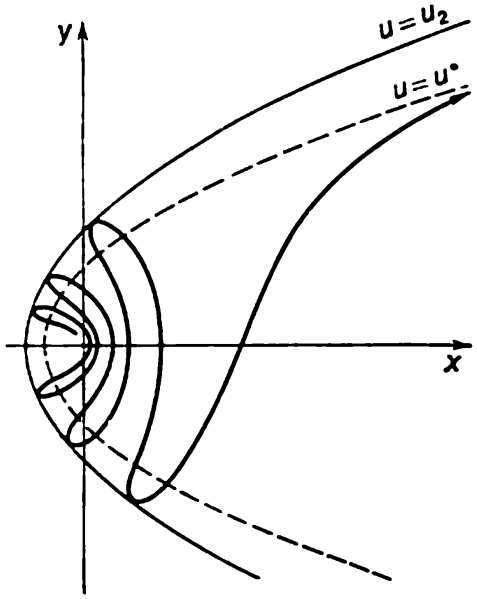


Fig. 3.7. Trajectoire en serpent de type I

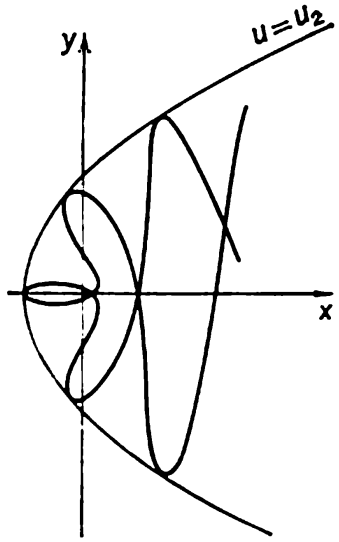


Fig. 3.8. Trajectoire de type II avec des points doubles

Trajectoires de type II. Elles ne diffèrent des précédentes que par leur faculté d'entourer le centre d'attraction, ce qui évite les « chemins de retour », ou « navettes ». Quelques trajectoires de ce type sont montrées sur les figures 3.8 à 3.11.

Trajectoires de type III. Très douces, sans points doubles, elles entourent le centre d'attraction (fig. 3.12, 3.13). Elles peuvent être *purement paraboliques*, en particulier radiales (le mouvement se produit parallèlement à f).

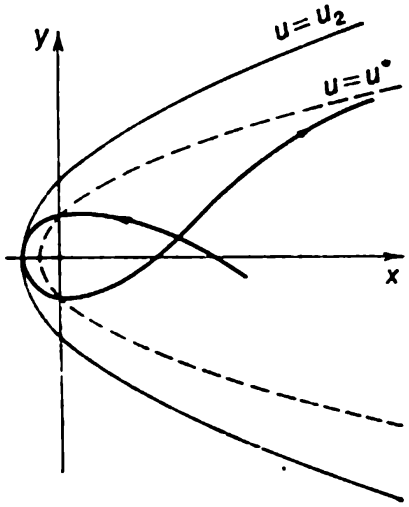


Fig. 3.9. Trajectoire en boucle de type II

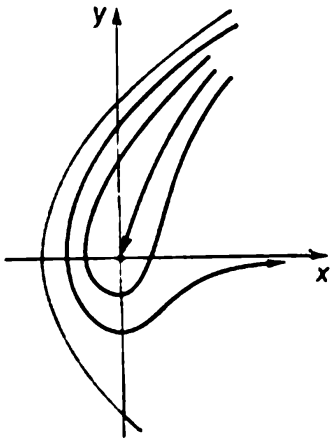


Fig. 3.10. Trajectoires de type II

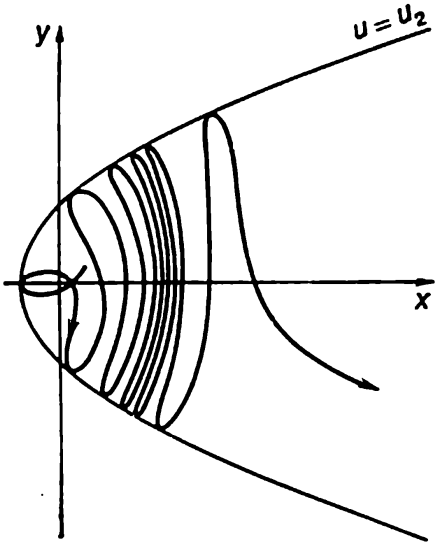


Fig. 3.11. Trajectoire en serpent de type II

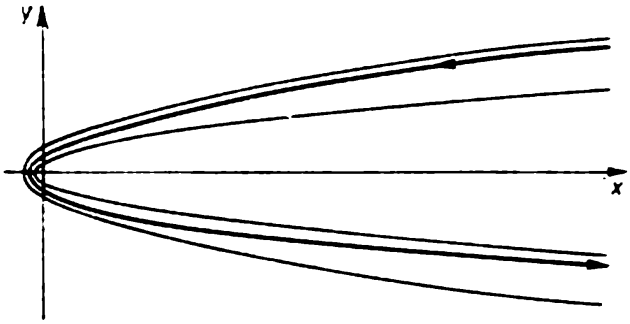


Fig. 3.12. Trajectoire de type III

Revenons à la trajectoire serpentiforme de type II montrée sur la figure 3.11. On remarque que dans sa partie « médiane » les boucles deviennent plus serrées. Il est intéressant d'observer sa variation au passage du domaine II dans le domaine IV (mouvements bornés). A la frontière des domaines la trajectoire se divise en trois (fig. 3.14). Tout d'abord, on voit surgir au droit des boucles serrées une nouvelle *trajectoire périodique* $v = \text{Cte} = v_3$. Le point matériel parcourt un *arc limité de la parabole*, à savoir la portion comprise à l'intérieur d'une parabole $u = u_2$. Il oscille sur l'arc $v = v_3$ limité par deux points de coordonnées $u = u_2$, $v = v_3$. Pour $t \to \infty$, on voit tendre asymptotiquement vers cette trajectoire, à gauche, une autre trajectoire ser-

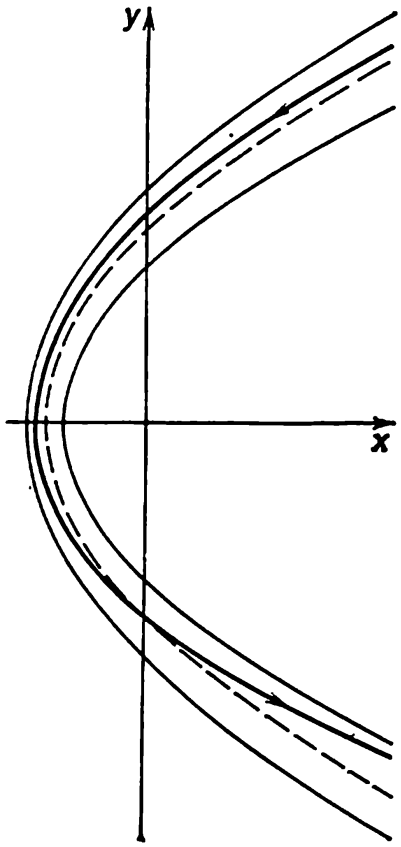


Fig. 3.13. Trajectoire de type III

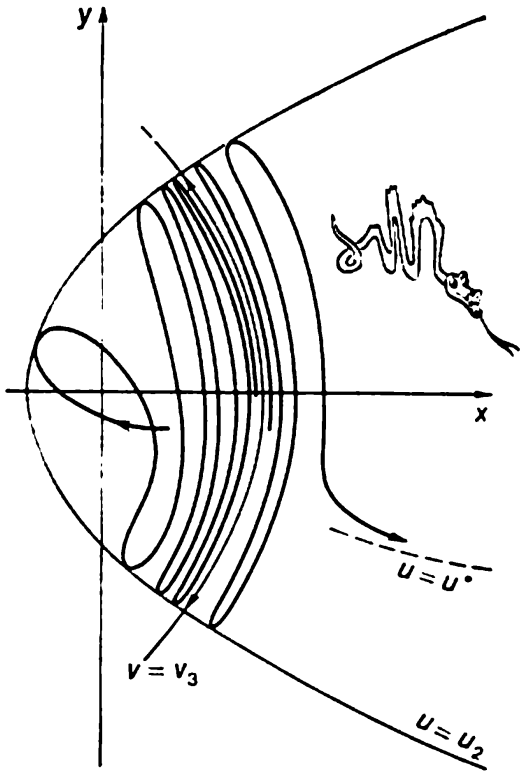


Fig. 3.14. Trajectoires à la frontière des domaines II et IV

pentiforme bornée. Se rapprochant de $v = v_3$, les boucles de cette dernière se serrent de plus en plus. L'allure exacte de cette trajectoire est la suivante : elle s'éloigne en oscillant de la parabole $v = v_3$, fait une fois le tour du centre d'attraction, puis, comme nous venons de le dire, tend asymptotiquement pour $t \to \infty$ tout en oscillant vers un arc de parabole $v = v_3$. Bien que bornée, elle ne se prête pas facilement à une définition en termes d'éléments osculateurs : les perturbations introduites par l'accélération additionnelle f sont trop fortes, et la trajectoire elle-même n'a visiblement rien à voir avec une « ellipse osculatrice ».

Enfin, à droite de l'arc $v = v_3$ on remarque une troisième trajectoire serpentiforme qui s'éloigne et qui, pour $t \to \infty$, se rapproche d'une parabole $u = u^*$ (et s'en va à l'infini avec cette dernière, ce que l'on peut voir sur la figure 3.14).

Voyons maintenant les trajectoires qui se situent dans le domaine des mouvements bornés (il peut y avoir aussi, comme nous l'avons signalé, des trajectoires non bornées).

Trajectoires de type IV. Dans les premiers instants qui suivent la traversée de la frontière entre les domaines II et IV à l'intérieur du

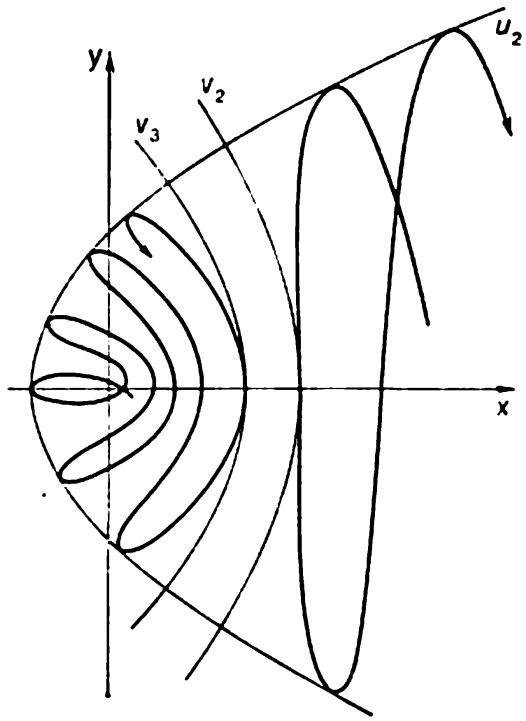


Fig. 3.15. Trajectoires bornée et non bornée dans le domaine IV

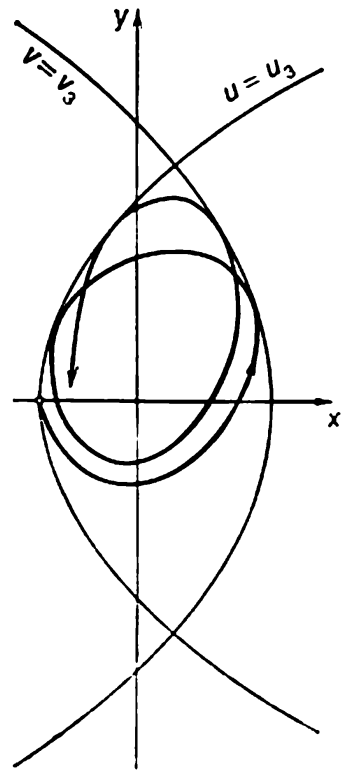


Fig. 3.16. Trajectoire quasi elliptique dans le domaine IV

domaine IV du plan c, $h/\sqrt{f}$, les trajectoires épousent la forme montrée sur la figure 3.15. Les ondulations prononcées de la trajectoire bornée ont pour cause l'influence de l'accélération additionnelle f qui est non négligeable. L'allure exacte de la trajectoire est la suivante: après avoir fait le tour du centre d'attraction, le point matériel, tout en oscillant entre les branches de la parabole $u = u_2$, progresse dans le sens des valeurs croissantes de v jusqu'à $v = v_3$, puis, dans le mouvement « rétrograde » en v, il parcourt de nouveau un chemin serpentiforme en se rapprochant du centre d'attraction et fait une boucle, et ainsi de suite.

En plus des trajectoires bornées, il y a dans ce domaine aussi des trajectoires non bornées (voir fig. 3.15), ce qui est dû à l'éloignement du centre d'attraction: l'effet de l'accélération additionnelle constante f devient plus prononcé que celui de l'attraction newtonienne.

La valeur de $|h|/\sqrt{f}$ devenant plus élevée, les trajectoires bornées changent de façon spectaculaire en prenant une allure quasi elliptique. Ce phénomène s'explique par la petitesse de f devant l'attraction newtonienne du centre. Une trajectoire de ce type se laisse décrire en grande partie en termes d'éléments osculateurs lentement variables (en moyenne) (voir fig. 3.16).

Toujours en termes d'éléments osculateurs, on peut dire que le demi-grand axe de l'orbite conserve une dimension à peu près constante, tandis que la direction de la ligne des apsides varie. Il est remarquable que *plus la ligne des apsides s'éloigne de la direction de* **f** *(de l'axe des x), plus l'excentricité de l'orbite devient grande*: la trajectoire évolue dans le sens de l'aplatissement. Le point de contact de

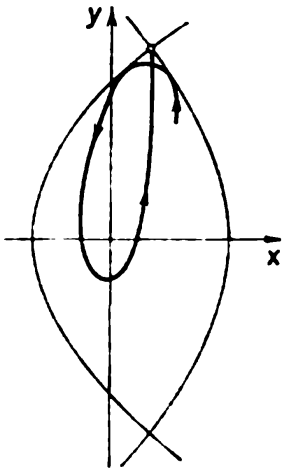
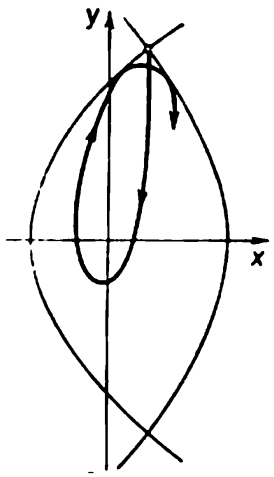


Fig. 3.17. Renversement de marche



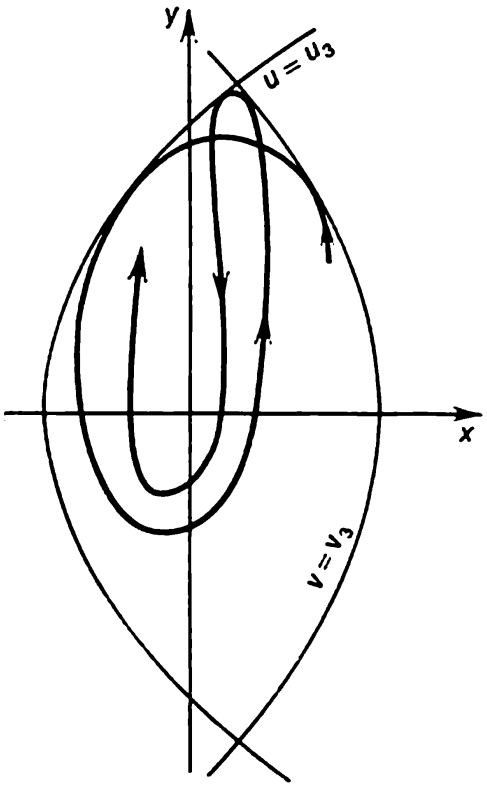


Fig. 3.18. Renversement de marche dans le cas général

la trajectoire avec la frontière $v = v_3$ sur la figure 3.16 se déplace suivant $v = v_3$ du côté où la parabole $v = v_3$ vient couper la parabole frontière $u = u_3$. Si, pendant ce mouvement, le point matériel arrive au point critique indiqué $v = v_3$, $u = u_3$, sa vitesse s'annule et il se met à parcourir *la même trajectoire mais en sens inverse* (fig. 3.17).

Dans le cas général il est peu probable que la trajectoire passe par le point critique, mais, même si elle traverse un voisinage de ce point, le renversement de marche se produit tout de même (fig. 3.18), et la trajectoire commence à évoluer dans l'ordre inverse. *Au mouvement direct du point matériel correspond le mouvement direct de la ligne des apsides de l'ellipse osculatrice, au mouvement rétrograde du point le mouvement rétrograde de la ligne des apsides; quand le demi-grand axe s'éloigne de la direction de* **f**, *l'excentricité osculatrice de l'orbite croît, et vice versa.*

Le renversement de marche complique notablement la description du mouvement en termes d'éléments osculateurs, car les éléments osculateurs changent instantanément [3.6].

En pratique, le point mobile n'atteint pas toujours le point de renversement de marche, car, à cause de l'aplatissement prononcé de sa trajectoire (dû à la forte excentricité), il peut se rapprocher trop de la surface du corps central (ce peut être la Terre) et finalement heurter cette surface [3.6]. Pour les trajectoires tridimensionnelles ce risque est minime ou inexistant, vu que le mouvement borné a toujours lieu à l'extérieur d'un domaine limité par deux paraboloïdes de révolution $u = u^*$, $v = v^*$: la Terre peut y rentrer tout entière et demeurer inaccessible.

En conclusion, décrivons brièvement quelques trajectoires périodiques. Puisqu'on a $T_u/T_v \leqslant 1$ partout dans le domaine IV, ce rapport peut aussi être une fraction rationnelle, auquel cas les trajectoires bornées deviennent justement périodiques. L'allure de la trajectoire périodique ne dépend pas seulement du rapport T_u/T_v mais aussi de la différence des phases initiales $u(\tau)$ et $v(\tau)$.

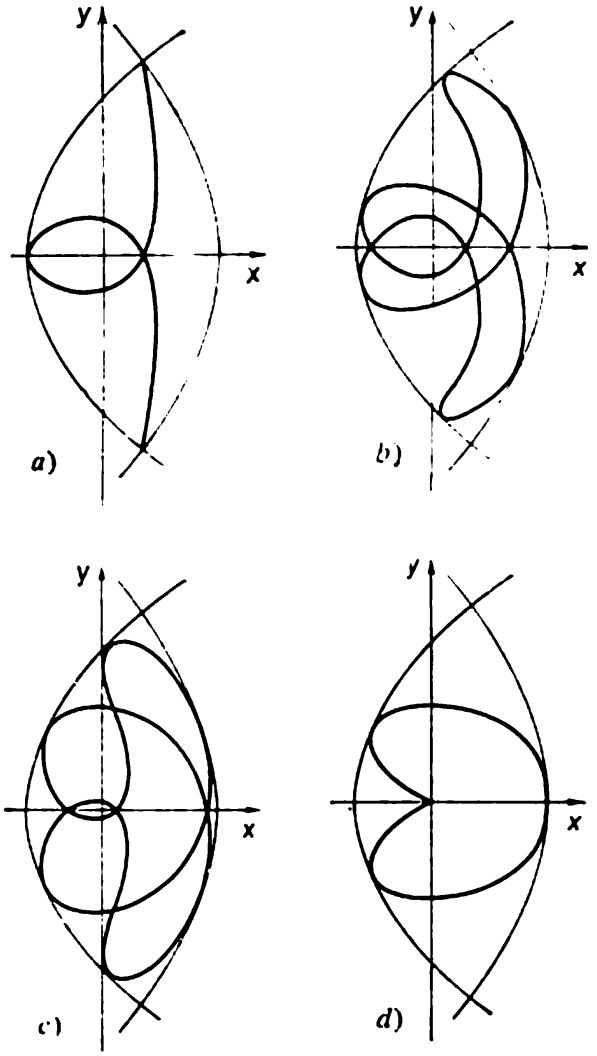


Fig. 3.19. Trajectoires périodiques. $T_u/T_v = 1/2$

On voit quelques trajectoires périodiques sur la figure 3.19. Certaines ont un caractère purement spéculatif, car elles passent par le centre d'attraction. Celles qui passent par le point critique où la vitesse devient nulle présentent un intérêt particulier : elles ont la forme de boucles ouvertes que le point matériel parcourt tantôt en sens direct, tantôt en sens inverse (fig. 3.19, *a*). La figure 3.19 montre les trajectoires pour $T_u/T_v = 1/2$. Les trajectoires de type *a*

ont lieu quand le minimum de $v(\tau)$ est atteint au même instant que le maximum de $u(\tau)$: elles sont « en opposition de phase ». Les cas *b* et *c* correspondent à des déphasages plus ou moins grands, tandis que le cas *d* montre les trajectoires « en phase », le minimum de $v(\tau)$ et de $u(\tau)$ étant atteint simultanément. La dernière trajectoire passe par le centre d'attraction.

La figure 3.20 représente les trajectoires en concordance et en opposition de phase pour $T_u/T_v = 1/3$. Sur la figure 3.21 sont mon-

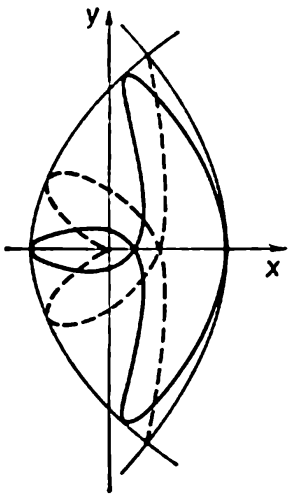
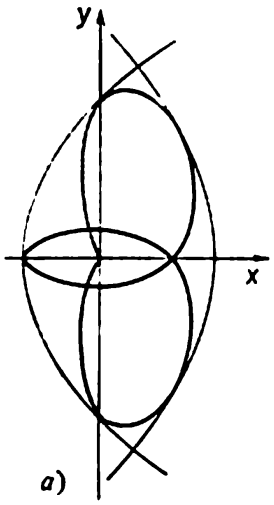


Fig. 3.20. Trajectoires périodiques. $T_u/T_v = 1/3$



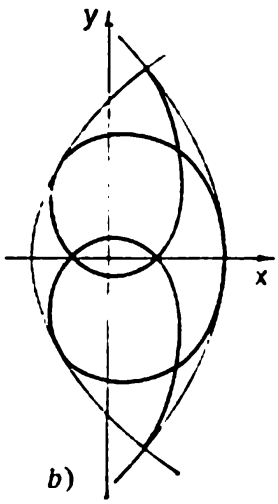


Fig. 3.21. Trajectoires périodiques. $T_u/T_v = 2/3$

trées les trajectoires pour $T_u/T_v = 2/3$, en phase et en opposition de phase (*a*) et « au quart de phase » (*b*).

Tout ce qui précède illustre la richesse de l'information apportée par les problèmes intégrables. On peut y rencontrer des trajectoires en serpent qui tendent asymptotiquement vers les oscillations suivant une portion de parabole bornée ; des trajectoires « de retour » où le point commence « tout à coup » à se mouvoir en sens inverse ; des mouvements oscillatoires le long d'un arc de parabole borné ; des sauts des éléments osculateurs de l'ellipse en évolution lente et le renversement de marche en orbite ; le risque de chute du point matériel mobile sur le corps central après de nombreuses révolutions autour de ce corps ; de surprenantes trajectoires périodiques « moustachues »... On ne s'attendait pas à tous ces effets après une superposition de deux mouvements aussi simples que le mouvement dans un champ de forces newtonien central et le mouvement dans un champ de forces homogène. Mais le fait est là : l'intégration exacte du problème nous a dévoilé tout un éventail d'effets insolites et, disons-le tout franchement, insoupçonnés dans un cas sur deux.

5. Quelques mots sur l'influence de la lumière sur les spoutniks

Si le satellite est placé sur une orbite suffisamment haute et s'il est de dimensions importantes mais de masse faible, son mouvement est très affecté par la pression de radiation solaire. C'est le cas par exemple des satellites-ballons américains *Echo* qui représentent des enveloppes gonflées de 30 à 40 mètres de diamètre.

Les satellites de la famille *Echo* font chaque jour plusieurs révolutions autour de la Terre, et quelques dizaines de révolutions en l'espace de une à deux semaines. C'est un délai suffisant pour cerner l'évolution à court terme de leur orbite. Or, ce temps est trop court pour que le Soleil puisse se déplacer sur la sphère céleste; on peut donc admettre que la pression de radiation sur le satellite reste à peu près constante en direction. D'autre part, la distance au Soleil ne variant pratiquement pas, on admet que cette pression est aussi constante en intensité. Dans ces conditions l'étude du mouvement du satellite se réduit au problème que nous avons défini au commencement du présent essai, avec, cependant, une différence non négligeable: le satellite peut entrer périodiquement *dans l'ombre de la Terre où la pression de radiation cesse d'agir.*

Le facteur dont nous parlons apporte des modifications tant qualitatives que quantitatives à l'évolution du mouvement du satellite. Ces modifications ont été étudiées en détail par Iou. Tchernikov [3.7], M. Lidov [3.8] et d'autres auteurs. Nous nous bornerons donc, en utilisant les lois dégagées précédemment, à essayer de comprendre les tendances qualitatives de l'évolution de l'orbite d'un satellite exposé à la pression de radiation et rentrant périodiquement dans l'ombre de la Terre. A cet effet, rappelons-nous ce que nous avions dit sur l'évolution des trajectoires bornées (fig. 3.16) et mettons l'intégrale de la demi-force vive (3.2.2) sous la forme

$$-\frac{1}{2a}-fx=h, \tag{3.5.1}$$

où a est le demi-grand axe *osculateur* de l'orbite.

L'accélération f provenant des rayons solaires étant très faible, les trajectoires garderont une allure quasi-elliptique.

Supposons que l'ombre terrestre occupe un volume cylindrique et que le mouvement soit plan: dans ces conditions le satellite subit une accélération perturbatrice $\mathbf{f}$ d'intensité constante dirigée parallèlement à l'axe des x partout sauf dans la portion de l'orbite où $x_1 < x < x_2$ (fig. 3.22). Sur le segment $[x_1, x_2]$ l'accélération indiquée cesse d'agir: on a $|\mathbf{f}| \equiv 0$. Puisque dans le mouvement borné on a $h < 0$, il vient

$$\frac{1}{2a}=|h|-fx, \tag{3.5.2}$$

et le mouvement peut être considéré dans le plan x, $1/2a$. Sur la figure 3.23 on voit la famille de droites (3.5.2) pour f fixé et pour différents h. Ayant déjà étudié des trajectoires bornées, nous savons que pour f constant et h fixé les valeurs de x restent toujours dans un intervalle $-x^* < x < x^*$. Le point représentatif oscillera donc dans le plan x, $1/2a$ le long du segment de la droite (3.5.2) limité par $-x^*$ et x^*, atteignant ses frontières de temps en temps; il va de soi que l'envergure des oscillations sera différente en chaque cycle, mais cela n'a pas beaucoup d'importance pour notre analyse.

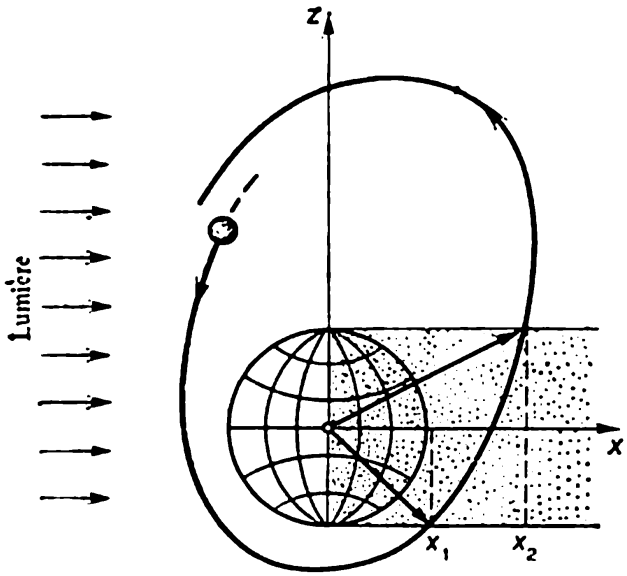


Fig. 3.22. Traversée de l'ombre de la Terre

Supposons maintenant que, h restant fixé, le mouvement commence en un point initial x_0 et qu'en un point $x_1 > 0$ l'accélération f devienne nulle: le satellite entre dans l'ombre de la Terre. A partir de cet instant le mouvement dans le plan x, $1/2a$ se produira suivant la droite $1/2a$ = Cte (fig. 3.24), jusqu'à ce que, en $x = x_2$, le satellite sorte de l'ombre.

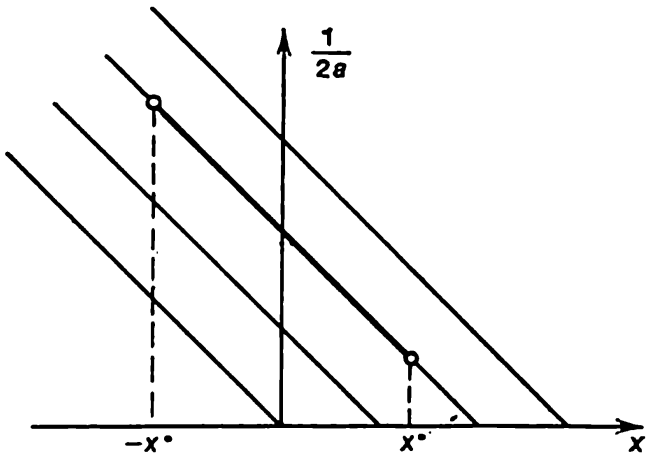


Fig. 3.23. Interprétation du mouvement dans le plan x, $1/2a$

Considérons le cas représenté sur la figure 3.22. Ici *le point d'entrée dans l'ombre est situé plus près de la Terre que le point de sortie.* La coordonnée x continue à croître alors après l'entrée dans l'ombre

($x > x_1$) et, ainsi qu'on le voit sur la figure 3.24, *après la sortie de l'ombre le mouvement passe à un niveau d'énergie* $|h|$ *plus élevé.* Cela revient à dire que *la longueur du demi-grand axe de l'orbite est devenue plus petite en moyenne.*

Ce fait traduit le passage à un nouvel état qualitatif dû à l'effet de l'ombre. Si l'accélération agit sans interruptions, la longueur du demi-grand axe de l'orbite ne présente que des variations de période

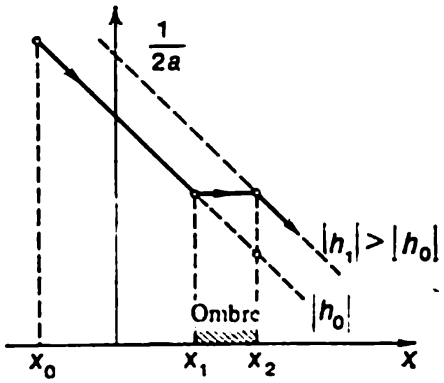


Fig. 3.24. Interprétation de l'effet de l'ombre

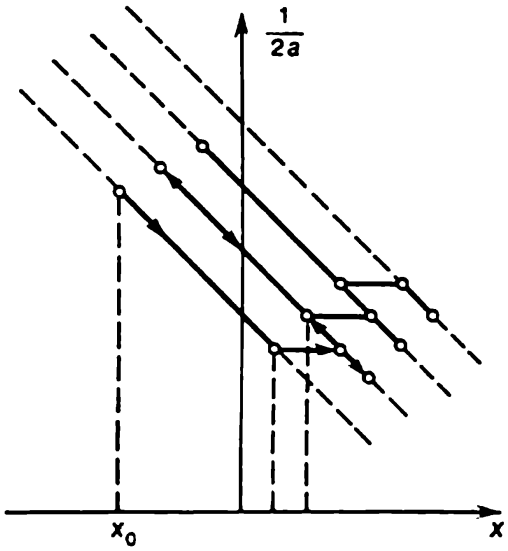


Fig. 3.25. Interprétation de l'évolution de la trajectoire

courte ; au contraire, l'entrée du satellite dans l'ombre et sa sortie de l'ombre font naître des variations systématiques (de période longue) du demi-grand axe. Un schéma possible des transitions à des niveaux d'énergie de plus en plus élevés est montré sur la figure 3.25.

Remarquons maintenant que le point d'entrée dans l'ombre ne peut être plus proche de la Terre que le point de sortie qu'en mouvement direct (voir figure) : on sait que ce mouvement est accompagné par le mouvement direct de la ligne des apsides. Dans le cas présent la ligne des apsides s'éloigne de la direction de l'accélération **f**. Dans notre analyse des trajectoires bornées, nous avons vu qu'un tel mouvement de la ligne des apsides fait croître l'excentricité. Il s'ensuit que *l'accroissement de longue période de l'excentricité* dû à la pression de radiation *s'accompagne d'un raccourcissement de longue période du demi-grand axe de l'orbite* sous l'effet de l'ombre terrestre. Analysant le mouvement rétrograde du satellite, on s'assure tout aussi bien que la diminution de l'excentricité s'accompagne d'un allongement du demi-grand axe de l'orbite, ce qui permet de formuler la loi générale du mouvement d'un satellite de la Terre

soumis à l'influence de la pression de radiation et traversant périodiquement l'ombre terrestre:

La ligne des apsides de l'orbite du satellite de la Terre oscille (avec une période prolongée) par rapport à la direction Soleil-Terre. Quand le demi-grand axe de l'orbite s'éloigne de cette direction, il devient plus court et l'excentricité augmente; quand le demi-grand axe se rapproche de la ligne Soleil-Terre, il devient plus long et l'excentricité diminue.

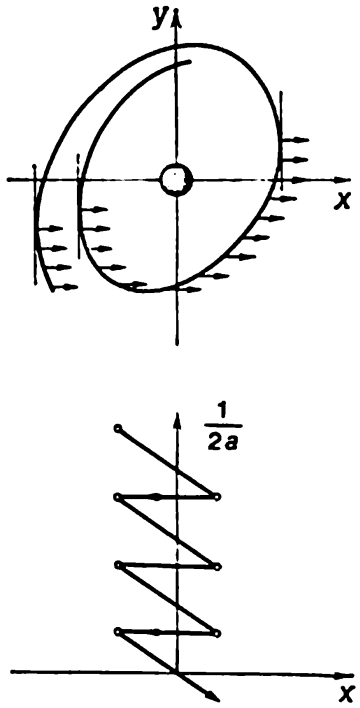


Fig. 3.26. Mise en vitesse du satellite par des branchements successifs de la poussée de sens constant

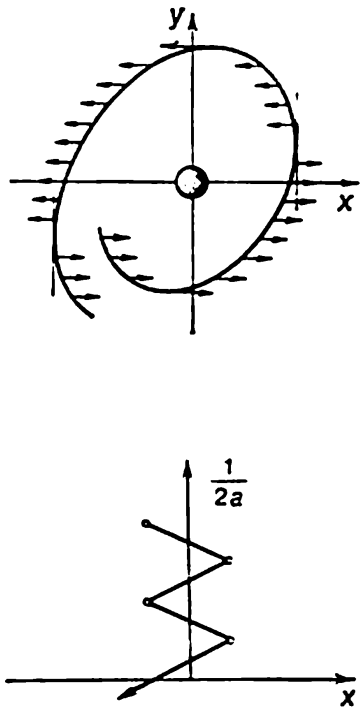


Fig. 3.27. Mise en vitesse du satellite par le renversement périodique du sens de la poussée

Cette liaison entre l'excentricité et la longueur du demi-grand axe a été découverte par l'Américain J. Meeus qui observait le mouvement des satellites de la famille *Echo*. L'explication théorique en a été fournie par Iou. Tchernikov. Ici nous avons trouvé une explication qualitative simple du phénomène.

Remarquons qu'en principe l'influence de l'ombre peut être telle que le demi-grand axe croîtra démesurément, peut-être à l'infini, et le satellite partira sans retour dans l'Espace! Théoriquement au moins, cela n'est pas exclu: il suffit de considérer le schéma de la figure 3.25 et de suivre l'évolution en sens inverse. Une telle évolution entraîne le passage à des niveaux d'énergie $|h|$ de plus en plus bas, ce qui correspond à l'allongement du demi-grand axe. Seule une étude spéciale pourrait indiquer dans quelles conditions l'allongement devient infini. Quand les intervalles temporels deviennent pro-

longés, on est obligé de prendre en considération aussi le mouvement du Soleil. Pour plus de détails, le lecteur peut consulter les travaux de M. Lidov [3.8], de Iou. Tchernikov [3.7], etc.

Examinons en conclusion une dernière question. Nous avons déjà dit que l'accélération f peut être introduite artificiellement (poussée ionique ou plasmatique). Cela veut dire qu'on peut la brancher et la débrancher à volonté. Les raisonnements développés précédemment portent à croire qu'on peut, en branchant systématiquement une petite poussée additionnelle (ou même en renversant systématiquement son sens), imprimer au satellite un mouvement de plus en plus accéléré suivant une orbite en spirale et l'envoyer finalement dans l'Espace, au-delà de la zone d'attraction terrestre. Les figures 3.26 et 3.27 illustrent cette possibilité et montrent les trajectoires correspondantes dans le plan x, $1/2a$.

QUATRIÈME ESSAI

LE MOUVEMENT DES MONDES

> Hi-Han, le vieux bourriquet gris, tout seul dans un coin de bois plein de chardons, pensait aux Choses Sérieuses. « Pourquoi ?» pensait-il tristement. Et parfois: « Pour quelle raison? » Et même: « Que faut-il en conclure? »
>
> *A. A. Milne*
> *Winnie l'ourson*

1. De nouveau le « théorème de Laplace » et autres Choses Sérieuses

Un satellite artificiel gravitant autour de la Terre se trouve exposé, en plus des autres facteurs, à l'attraction de la Lune et du Soleil. L'effet de ces perturbations sur l'orbite du satellite est plutôt étonnant, voire inattendu... Mais n'anticipons pas: depuis deux centaines d'années, la mécanique céleste ne fait rien d'autre qu'étudier le mouvement des astres sous l'action des attractions mutuelles. Le problème du mouvement d'un satellite de la Terre peut être considéré comme un cas particulier du « problème de n corps » cher aux classiques de la mécanique céleste qui en savent long...

La situation classique étudiée en mécanique céleste est celle où la masse d'un corps (c'est le Soleil!) est très supérieure à celle des autres corps qui s'attirent les uns les autres; on peut donc admettre en première approximation que tous les corps (les planètes) se déplacent autour du Soleil suivant les orbites képlériennes. La question est de savoir comment évoluent ces orbites sous l'effet des attractions mutuelles des planètes. Mais la question cruciale, elle, est: notre système solaire gardera-t-il éternellement sa configuration d'aujourd'hui? Autrement dit, le système solaire est-il stable? Les mouvements actuels des planètes ne changeront-ils pas? les astres ne quitteront-ils pas « leurs circuits »? ne tomberont-ils pas les uns sur les autres et sur le Soleil? Et finalement, ne quitteront-ils pas le système solaire maternel pour s'envoler dans l'infini?

Nous ne parlons de la stabilité (ou de l'instabilité) que sous l'action des attractions newtoniennes réciproques des planètes. Celles-ci

sont assimilées à des points matériels doués de masses égales aux masses réelles des planètes, comme dans le classique « problème de n corps ».

Soit donc un système de $n+1$ points M_s ($s = 0, 1, 2, \ldots, n$), de masses m_s, qui s'attirent les uns les autres suivant la loi de Newton. Supposons que la masse m_0 soit très grande devant toutes les autres prises ensemble. Dans le système solaire, m_0 représente la masse du Soleil ; dans le système de trois corps constitué par la Terre, par la Lune et par le satellite artificiel, m_0 est la masse de la Terre.

Pour simplifier les choses, nous ne parlerons, dans le texte qui suit, que du système planètes-Soleil (à moins d'indication contraire).

L'hypothèse admise n'affecte aucunement la précision des équations du mouvement mais permet de séparer, dans ces équations, la partie principale et les perturbations.

En prenant M_0 comme origine du système de coordonnées cartésiennes, les équations du mouvement d'un i-ième point (de coordonnées x_i, y_i, z_i) seront [4.1]

$$x_i = \frac{\partial U_i}{\partial x_i}, \quad y_i = \frac{\partial U_i}{\partial y_i}, \quad z_i = \frac{\partial U_i}{\partial z_i}, \tag{4.1.1}$$

où

$$U_i = \frac{f(m_0+m_i)}{r_i} + U_i^*,$$

$$U_i^* = f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3} \right). \tag{4.1.2}$$

L'apostrophe affectant le signe de la somme veut dire qu'on saute le terme pour lequel $j = i$; $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}$ est la distance de l'i-ième point au point M_0 ; $\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}$ la distance entre l'i-ième et le j-ième points. S'il n'y avait que deux points M_0 et M_i, le point M_i se déplacerait par rapport à M_0 suivant l'orbite képlérienne qui correspond à la fonction de forces $U_0 = \frac{f(m_0+m_i)}{r_i}$. Or, la présence des autres points perturbe le mouvement du point M_i. Ces perturbations sont décrites par la partie perturbatrice U_i^* de la fonction de forces U_i. Nous garderons pour la suite l'expression (4.1.2) de U_i^*, mais à présent nous ferons quelques transformations importantes.

Pour mettre les équations du mouvement perturbé des planètes sous la forme canonique, commode pour l'analyse, on est obligé d'introduire un système de coordonnées particulier pour l'étude de chaque planète M_s [4.1], à savoir : un système de coordonnées cartésiennes rectangulaires x'_s, y'_s, z'_s ayant son origine au centre de masse G_{s-1} des points M_0, M_1, . . ., M_{s-1} et conservant les directions inchangées des axes. Dans les équations du mouvement interviennent

alors les « masses réduites » :

$$m'_s = m_s \frac{m_0 + m_1 + \ldots + m_{s-1}}{m_0 + m_1 + \ldots + m_{s-1} + m_s}. \tag{4.1.3}$$

Dans l'hypothèse de la prédominance de la masse m_0,

$$m_0 \gg \sum_{i=1}^{s} m_i,$$

on a bien évidemment $m'_s \approx m_s$. Dans le système solaire tous les points G_{s-1} se trouvent à l'intérieur du Soleil, à proximité du centre. Le centre de masse du système Lune-Terre se trouve à l'intérieur de la Terre ; le rapport de la masse de la Lune m_L à celle de la Terre m_T est $m_L/m_T \approx 1/81$.

Considérons la fonction de forces complète U du système de points $M_0, M_1, \ldots, M_n$:

$$U = f \sum_{s<j} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}. \tag{4.1.4}$$

Ici Δ_{sj} sont les distances entre les points pris deux à deux. Dans les nouvelles coordonnées x'_s, y'_s, z'_s, la fonction de forces (4.1.4) se laisse mettre sous la forme

$$U = f \sum_{j=1}^{n} \frac{m_0 m_j}{r'_j} + U', \tag{4.1.5}$$

où

$$r'_j = \sqrt{x'^2_s + y'^2_s + z'^2_s} \quad (r'_1 = \Delta_{01}).$$

La fonction perturbatrice U' dans (4.1.5) a bien sûr une autre forme que la fonction perturbatrice U^*_i dans (4.1.2), à cause d'un nouveau système de coordonnées (et aussi parce que U^*_i se rapporte à un point isolé et U' au système tout entier).

Nous n'écrirons pas explicitement l'expression de U', car nous n'aurons besoin, dans la suite, que de quelques propriétés générales de cette fonction. Elle est du second ordre de petitesse par rapport aux masses perturbatrices [4.1]. Si on la supprime dans (4.1.5), il se trouve que les équations du mouvement d'un point M_s ne dépendent des coordonnées d'aucun point M_j, $j \neq s$, et le point M_s suivra une orbite képlérienne qu'on peut définir par rapport au système de coordonnées x'_s, y'_s, z'_s en introduisant les éléments

$$p_s, \quad e_s, \quad \omega_s, \quad \Omega_s, \quad i_s, \quad \tau_s, \tag{4.1.6}$$

avec i_s l'inclinaison du plan de l'orbite sur le plan x'_s, y'_s, les autres éléments étant définis comme dans le premier essai.

Or, étant donné l'interaction des masses, la fonction perturbatrice U' agit sur les éléments osculateurs (4.1.6) en les faisant varier. Considérant le mouvement perturbé en termes d'éléments (4.1.6), on se rend compte qu'ils diffèrent de leurs valeurs constantes non perturbées. Pour analyser ces variations, il est commode d'introduire les éléments de Delaunay comme nous l'avons fait dans le premier essai :

$$\left.\begin{aligned} L_s &= \sqrt{\mu'_s a_s}, & l_s &= n_s (t-\tau_s), \\ G_s &= \sqrt{\mu'_s a_s (1-e_s^2)}, & g_s &= \omega_s, \\ H_s &= \sqrt{\mu'_s a_s (1-e_s^2)} \cos i_s, & h_s &= \Omega_s. \end{aligned}\right\} \tag{4.1.7}$$

Ici $\mu'_s = f(m_0 + m'_s)$, où m'_s est défini par (4.1.3) ; le moyen mouvement est $n_s = \sqrt{\mu'_s/a_s^3}$, et le demi-grand axe

$$a_s = \frac{p_s}{1-e_s^2}. \tag{4.1.8}$$

Introduisons la fonction de Hamilton

$$F = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mu_s'^2}{2L_s^2} + U', \tag{4.1.9}$$

en supposant naturellement que U' soit écrit au moyen des éléments de Delaunay. Ceci fait, les équations du mouvement perturbé se mettent sous forme canonique :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL_s}{dt} = \frac{\partial F}{\partial l_s}, \quad \frac{dG_s}{dt} = \frac{\partial F}{\partial g_s}, \quad \frac{dH_s}{dt} = \frac{\partial F}{\partial h_s}, \\ &\frac{dl_s}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial L_s}, \quad \frac{dg_s}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial G_s}, \quad \frac{dh_s}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial H_s} \\ &\qquad (s = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{4.1.10}$$

Ces équations du mouvement sont exactes ; il leur correspond donc des intégrales premières exactes. On sait que le problème du mouvement d'un système de n points qui s'attirent admet dix intégrales premières classiques. Puisque toutes les forces du système peuvent être considérées comme intérieures, la quantité de mouvement du système reste inchangée, ce qui nous donne trois intégrales premières en composantes suivant les axes de coordonnées ; le centre de masse du système est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, d'où trois autres intégrales ; le moment cinétique du système reste inchangé, encore trois intégrales en composantes suivant les axes de coordonnées ; la dixième intégrale est enfin celle de la demi-force vive.

Les intégrales relatives au mouvement du centre de masse du système n'ont que peu d'intérêt ; au contraire, les quatre intégrales

premières qui restent peuvent donner une information substantielle sur le mouvement. En particulier, on en dégage le résultat suivant: *pour que les mouvements soient bornés, il faut (mais il ne suffit pas!) que la constante de l'énergie soit négative* (ce que nous supposerons partout dans la suite). On trouve une démonstration bien simple de ce résultat par exemple dans le livre de G. Doubochine [4.1]; le lecteur aura remarqué que nous faisons un large usage de ce livre dans nos essais.

Des trois intégrales qui définissent la conservation du moment cinétique, nous en retiendrons une et nous l'écrirons au moyen de nos variables. Elle se présente comme suit:

$$\sum_{s=1}^{n} m'_s \sqrt{\mu'_s p_s} \cos i_s = c. \tag{4.1.11}$$

Rappelons que (4.1.11) est une intégrale exacte des équations du mouvement!

Remarquons ensuite, toujours par analogie au premier essai, que F est une fonction périodique de l_s et développons F en une série de Fourier n-uple:

$$F = \overline{F} + \sum_{k_1, \ldots, k_n} a_{k_1, \ldots, k_n} \cos (k_1 l_1 + \ldots + k_n l_n) + \\ + b_{k_1, \ldots, k_n} \sin (k_1 l_1 + \ldots + k_n l_n), \tag{4.1.12}$$

où

$$\overline{F} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} F dl_1 \ldots dl_n \tag{4.1.13}$$

et les coefficients $a_{k_1, \ldots, k_n}$, $b_{k_1, \ldots, k_n}$ dans (4.1.12) dépendent de tous les éléments (en général) sauf l_s. Notons que dans tous les termes sous le signe somme, il y a au moins un k_i non nul. Supposons qu'aucune famille de nombres entiers (positifs ou négatifs)

$$k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n \tag{4.1.14}$$

ne vérifie la condition de résonance

$$\sum_{s=1}^{n} k_s n'_s = 0.$$

Autrement dit, on a

$$\sum_{s=1}^{n} k_s n'_s \neq 0 \tag{4.1.15}$$

pour tous les nombres (4.1.14). On peut alors déduire les équations de la première approximation (au sens des méthodes asymptotiques) en mettant en moyenne les seconds membres des équations (4.1.10)

ou, ce qui revient au même, la fonction de Hamilton (4.1.12) suivant chaque variable l_s de façon indépendante. En fait, cela revient à remplacer la fonction de Hamilton (4.1.9) par sa valeur moyenne (4.1.13) et à porter cette dernière dans les équations (4.1.10). Puisque $\bar{F}$ ne dépend plus de l_s (grâce à la mise en moyenne suivant les l_s), il ressort de (4.1.10) que $dL_s/dt = 0$ (parce que $\partial\bar{F}/\partial l_s = 0$); de la définition de L_s (4.1.7) on déduit alors que les demi-grands axes de toutes les orbites ont une longueur constante,

$$a_s = \text{Cte}. \tag{4.1.16}$$

Ce résultat est résumé par un théorème dit « théorème de Laplace », selon lequel les demi-grands axes des orbites du système solaire sont « invariables » (n'ont pas de perturbations séculaires). D'une façon générale, cette conclusion n'est valable que dans un intervalle temporel borné, car la première approximation des méthodes asymptotiques ne « joue » que sur un intervalle borné. Plus exactement, on peut affirmer que $| a_s - a_{s0} | \sim \varepsilon$ sur $t \sim 1/\varepsilon$, où ε est petit de l'ordre des perturbations et a_{s0} sont les valeurs initiales des demi-grands axes.

Les estimations exactes sont difficiles à établir; or, elles seules peuvent répondre à la question posée au début : le système en question est-il stable dans un intervalle de temps indéfiniment long? Nous y reviendrons encore, cette question étant la clé de voûte du présent essai. En attendant, voyons autre chose : la condition (4.1.16) étant vérifiée, « que faut-il en conclure » comme disait l'ami Hi-Han?

Introduisons la notation

$$\sum_{s=1}^{n} m_s' \sqrt{\mu_s' a_s} = \varphi \tag{4.1.17}$$

et retranchons (4.1.11) de (4.1.17). Compte tenu de (4.1.8), il vient

$$\sum_{s=1}^{n} m_s' \sqrt{\mu_s' a_s}\,(1 - \sqrt{1-e_s^2}\cos i_s) = \varphi - c,$$

ou

$$\sum_{s=1}^{n} m_s' \sqrt{\mu_s' a_s}\,\frac{\sin^2 i_s + e_s^2 \cos^2 i_s}{1+\sqrt{1-e_s^2}\cos i_s} = \varphi - c. \tag{4.1.18}$$

Or, si (4.1.16) a lieu, alors $\varphi - c = c_0$ est une nouvelle constante égale à la valeur du premier membre de l'égalité (4.1.18) à l'instant initial. Puisque chaque terme de la somme du premier membre de (4.1.18) est positif, on a $c_0 > 0$ et chaque terme de la somme est plus petit que c_0. D'où la majoration

$$\frac{\sin^2 i_s + e_s^2 \cos^2 i_s}{1+\sqrt{1-e_s^2}\cos i_s} \leqslant \frac{c_0}{m_s' \sqrt{\mu_s' a_s}}. \tag{4.1.19}$$

Le fait que a_s ne soit pas constant mais peu différent d'une constante ($| a_s - a_{s0} | \sim \varepsilon$) ne contredit pas la majoration (4.1.19): elle reste valable aussi en tenant compte de ce caractère de a_s.

Si les valeurs initiales e_{s0}, i_{s0} sont très petites, la constante c_0 est très petite elle aussi. Il ressort alors de (4.1.19) que *les quantités* e_s, i_s *restent petites* sur tout l'intervalle de temps considéré. On peut en déduire le « théorème de Laplace sur la stabilité du système solaire »:

Supposons que les planètes tournent autour du Soleil dans la même direction suivant des orbites sensiblement circulaires peu inclinées les unes sur les autres; soient les moyens mouvements des planètes incommensurables. Alors, à l'expiration d'un temps suffisamment long, les demi-grands axes des orbites conserveront une longueur proche de leur longueur initiale et les orbites resteront sensiblement circulaires et peu inclinées les unes sur les autres.

Ce théorème est un résultat remarquable de la mécanique céleste classique. En effet, les planètes du système solaire gravitent sur des orbites presque circulaires et situées à peu près dans le même plan. A en croire le « théorème de Laplace », il en sera ainsi suffisamment longtemps. La collision n'est pas pour demain.

Notons que si à l'instant initial toutes les orbites sont circulaires et situées dans le même plan, on a $c_0 = 0$, et de (4.1.19) il ressort que toutes les orbites resteront circulaires et coplanaires. Un système circulaire plan n'évolue pas.

Seulement ce n'est pas pour rien que nous avons mis entre guillemets le « théorème de Laplace sur la stabilité du système ». Quelle est cette stabilité qui risque de sauter après-demain! (Ou dans un siècle, peu importe!) Ce qui nous intéresse, c'est la stabilité au sens classique, une stabilité *ad vitam aeternam*! Le « théorème de Laplace » reste-t-il vrai au bout d'un temps infini? La réponse à cette question poignante a été apportée assez récemment, en premier lieu grâce aux travaux du mathématicien soviétique V. Arnold. Nous en parlerons un peu plus tard. Et maintenant, avant de terminer le n°, décrivons le caractère du mouvement perturbé d'un système de planètes. Pour le faire, on doit ajouter quelques données aux résultats qui figurent dans le « théorème de Laplace ».

Soit $\mathbf{e}_k$ vecteur laplacien d'une k-ième planète, porté par le demi-grand axe de l'orbite, orienté vers le périhélie et proportionnel en module à l'excentricité de l'orbite:

$$|\mathbf{e}_k| = \sqrt[4]{m_k^2 a_k}\, e_k.$$

L'analyse du mouvement perturbé montre alors que

$$\mathbf{e}_k = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{e}_{ki},$$

où chaque vecteur $\mathbf{e}_{ki}$ est animé d'une rotation uniforme avec la fréquence $\nu_i^{(\omega)}$.

Les valeurs des $\nu_i^{(\omega)}$ sont très faibles, et par conséquent, les périhélies de toutes les orbites se déplacent lentement mais inexorablement (séculairement) dans les plans de leurs orbites ; leur mouvement est défini par une famille de n fréquences $\nu_i^{(\omega)}$ de telle façon que le vecteur laplacien de chaque orbite soit la somme de n vecteurs tournant uniformément avec les fréquences $\nu_i^{(\omega)}$. Par ailleurs, le plan de l'orbite est incliné à l'angle i_k sur le plan de coordonnées principal ; la trace de l'intersection de ces plans s'appelle *ligne des nœuds*. La variation séculaire de ces grandeurs est décrite par un vecteur $\mathbf{i}_k$ dirigé suivant la ligne des nœuds et tel que $|\mathbf{i}_k| = \sqrt[4]{m_k^2 a_k} i_k$. Ce vecteur est aussi la somme de vecteurs qui tournent uniformément avec les fréquences ν_i^{Ω}, mais ces vecteurs sont déjà au nombre de $n - 1$.

Tel est *grosso modo* le mouvement perturbé d'un système de n planètes gravitant autour d'un corps central massif (le Soleil). Les planètes suivent toujours des orbites faiblement elliptiques et peu inclinées, conservant les longueurs de leurs demi-grands axes ; les plans des orbites précessionnent de façon séculaire, de même que les orbites elles-mêmes dans leurs plans, les vitesses des précessions étant définies par la superposition des rotations uniformes décrite plus haut. Un tel mouvement des planètes s'appelle *mouvement lagrangien*.

2. Laissons tomber la Lune sur la Terre

Les effets les plus surprenants ont été découverts en mécanique du vol spatial en analysant le problème des trois corps et de plusieurs corps qui s'attirent deux à deux.

En mécanique céleste classique, les études du mouvement des planètes et d'autres corps du système solaire avaient un caractère essentiellement utilitaire : elles portaient sur des orbites presque coplanaires et sensiblement circulaires. Une telle approche était bien sûr justifiée par les besoins de la pratique astronomique. Le théorème de Laplace reflète précisément cette approche. La plupart des chercheurs en mécanique céleste classique n'ont pas manifesté beaucoup d'intérêt pour les orbites « exotiques », c'est-à-dire fortement inclinées et elliptiques. C'est le lancement des premiers appareils spatiaux qui a marqué un regain d'intérêt pour les études qui n'imposaient aucune restriction à la forme et à la position de l'orbite.

Considérons par exemple le problème du mouvement d'un satellite artificiel entaché par des perturbations dues à l'influence de la Lune. En fait, il s'agit d'un problème des trois corps : la Terre, la Lune, le satellite artificiel. La masse de ce dernier étant négligeable

devant celle de la Terre et de la Lune, il est logique d'admettre que le satellite artificiel n'attire absolument pas la Terre ni la Lune. De ce fait, la Terre et la Lune, assimilées à des points matériels, gravitent suivant des orbites képlériennes non perturbées par rapport à leur centre de masse commun. Tout revient à savoir de quelle façon l'orbite du satellite est perturbée par la Lune lors de son mouvement circumterrestre : ainsi posé, le problème est dit *restreint*. Si le satellite reste raisonnablement éloigné de la Lune, son mouvement n'est presque pas perturbé, si bien qu'on peut appliquer les résultats obtenus dans le n° précédent. En particulier, le demi-grand axe de l'orbite du satellite reste inchangé en moyenne,

$$a = \text{Cte}. \tag{4.2.1}$$

Considérons à présent l'intégrale des aires (4.1.11) qui ne garde en l'occurrence que deux termes de la somme, afin de tenir compte des éléments de l'orbite de la Lune et de celle du satellite. Or, la Lune suit une trajectoire non perturbée, si bien que ses éléments p_L, $\cos i_L$ ne changent pas. L'intégrale (4.1.11) ne porte donc que sur les éléments du satellite :

$$\sqrt{p} \cos i = \text{Cte}. \tag{4.2.2}$$

Elevant (4.2.2) au carré et tenant compte de (4.2.1) (et aussi de 4.1.8)), on obtient

$$(1 - e^2) \cos^2 i = c, \tag{4.2.3}$$

où la constante c dépend des valeurs initiales e_0, $\cos i_0$ de l'orbite du satellite. Remarquons que l'angle i peut être considéré ici comme l'inclinaison du plan de l'orbite du satellite sur le plan de l'orbite lunaire.

On conçoit que le mouvement mis en moyenne doit admettre, en plus de l'intégrale (4.2.3), aussi l'intégrale

$$\overline{F} = \text{Cte} = h, \tag{4.2.4}$$

où $\overline{F}$ est défini par (4.1.13). Cette dernière intégrale se laisse mettre, dans le cas considéré, sous la forme

$$e^2 \left(\frac{2}{5} - \sin^2 \omega \sin^2 i \right) = h_0. \tag{4.2.5}$$

Après avoir éliminé e^2 au moyen de (4.2.3), l'intégrale (4.2.5) devient

$$\sin^2 \omega = \frac{\cos^2 i \,(2 - 5h_0) - 2c}{(1 - \cos^2 i)(\cos^2 i - c)}. \tag{4.2.6}$$

La formule (4.2.6) permet de définir aisément les valeurs de $\sin^2\omega$ en fonction de $\cos^2 i$ pour des valeurs fixées de c et pour différentes

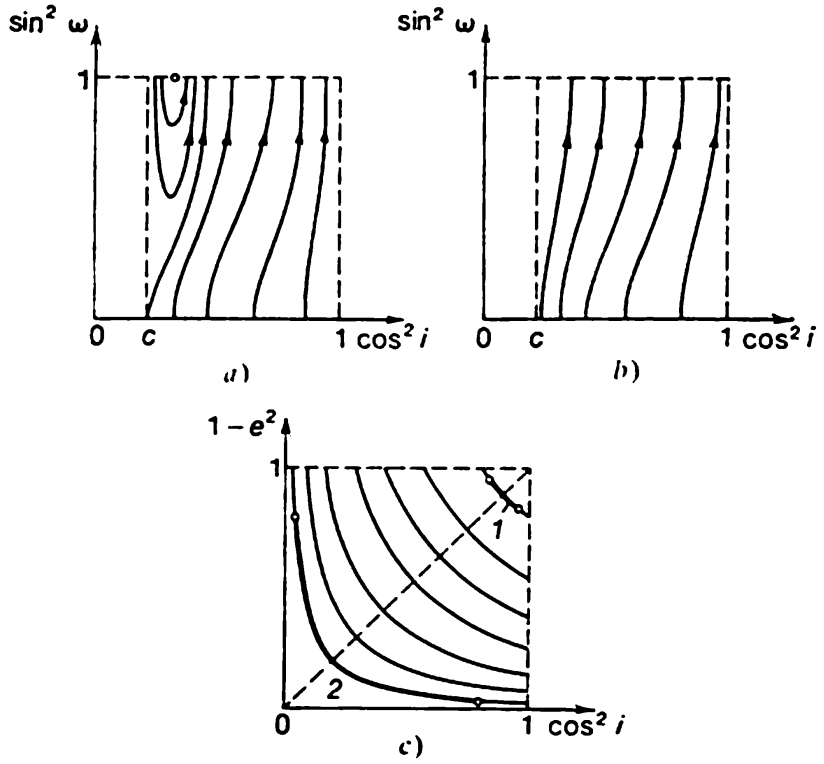


Fig. 4.1. Courbes intégrales des équations d'évolution

valeurs de h_0. Les allures possibles de ces fonctions sont schématiquement montrées sur les figures 4.1, *a* et 4.1, *b*. Le point représentatif sur le plan ($\sin^2\omega$, $\cos^2 i$) parcourt entièrement la courbe intégrale donnée en oscillant, avec une période prolongée, le long de cette courbe entre les valeurs limites possibles des variables. On comprend donc que la longitude du périgée ω peut changer de façon monotone mais aussi varier entre certaines limites (remarquons qu'il existe une orbite stationnaire ω = Cte, i = Cte et donc e = Cte). En ce qui concerne l'angle i, sa valeur oscille toujours entre deux valeurs extrêmes.

Etudions maintenant l'allure des courbes intégrales (4.2.3) sur le plan ($1 - e^2$, $\cos^2 i$) pour différentes valeurs de la constante c (c'est-à-dire pour différentes valeurs initiales e_0, i_0). Ce cas est représenté sur la figure 4.1, *c*. L'ensemble de définition des variables est $0 \leqslant 1 - e^2 \leqslant 1$, $0 \leqslant \cos^2 i \leqslant 1$. Les courbes (4.2.3) sont des hyperboles équilatères par rapport aux variables $1 - e^2$, $\cos^2 i$. Avec l'évolution de l'orbite du satellite, son excentricité e et son inclinaison i varient de telle façon que le point représentatif sur le plan ($1 - e^2$, $\cos^2 i$) oscille sur l'hyperbole qui correspond à la valeur de la constante

$$c = c_0 = (1 - e_0^2) \cos^2 i_0.$$

L'analyse des équations d'évolution et de l'intégrale (4.2.6) montre qu'en mouvement réel le point ne parcourt pas la courbe intégrale (4.2.3) tout entière mais seulement un arc limité de la courbe. Les limites des oscillations du point représentatif sur la figure 4.1, *c* dépendent de la valeur de la constante h dans l'intégrale (4.2.4), mais elles peuvent être suffisamment larges, auquel cas le point représentatif parcourt presque toute la courbe intégrale (4.2.3). Sur la figure 4.1, *c* les limites des oscillations sont indiquées par des ronds, et la portion du mouvement réel par un trait fort.

L'angle supérieur de droite sur la figure 4.1, *c* correspond aux orbites peu inclinées ($i \approx 0$) et faiblement elliptiques ($e \approx 0$). Nous voyons que si, à l'origine, l'orbite est presque circulaire ($e_0 \approx 0$) et peu inclinée sur le plan de l'orbite du corps perturbateur ($i_0 \approx 0$), les variations de e et de i resteront petites; l'orbite est stable et reste toujours sensiblement circulaire et peu inclinée, en plein accord avec le théorème de Laplace (courbe *1* sur la figure 4.1, *c*). En particulier, l'orbite circulaire plane ($e_0 = 0$, $i_0 = 0$) restera circulaire et plane. D'autre part, comme le montrent les intégrales (4.2.3) et (4.2.5), une orbite plane ($i \equiv 0$) conserve son excentricité initiale, quelle que soit cette dernière ($e = e_0$). (Il en est bien sûr tout autrement quand il s'agit d'un problème plan de plusieurs corps.)

Si l'inclinaison initiale est proche de $\pi/2$, l'évolution du mouvement se présente tout à fait autrement. Même si l'orbite initiale est circulaire, elle tend à s'allonger très fortement (l'excentricité tend vers une valeur proche de 1), si bien que $(1 - e^2) \to \varepsilon \sim 0$. On le voit en examinant la courbe *2* sur la figure 4.1, *c*. Or, si le demi-grand axe reste inchangé, l'accroissement de l'excentricité ne peut avoir d'autre effet qu'un aplatissement prononcé de l'orbite. La figure 4.2 montre deux orbites des satellites artificiels de la Terre qui ont le même demi-grand axe mais des excentricités différentes. On comprend qu'au cours de son évolution l'orbite du satellite peut devenir tellement étroite qu'elle rencontrera la surface du globe terrestre. Au bout de quelques révolutions (ou de quelques dizaines de révolutions) le satellite risque de tomber sur la Terre rien que sous l'effet de l'attraction lunaire!

La mécanique céleste classique et les recherches ultérieurs (N. Moïsséev [4.2]) faisaient déjà état de cette éventualité. Mais il a fallu attendre le lancement des premiers spoutniks pour que l'analyse de l'évolution des orbites « exotiques » suscite l'intérêt de nombreux chercheurs.

M. Lidov a effectué un cycle d'études dans ce domaine. Il a établi par exemple les « durées de vie » des satellites en orbite fortement inclinée et fait une analyse détaillée du mouvement perturbé. On lui doit en outre un résultat ([4.3, 4.4]) qu'on peut qualifier de percutant.

Considérons un système de trois corps constitué par le Soleil, la Terre et la Lune. On sait que l'orbite circumterrestre de la Lune est contenue à peu près exactement dans le plan de l'orbite circumsolaire de la Terre (plan de l'écliptique). On se demande ce qui arrive si, sans changer l'orbite de la Lune en elle-même, on la faisait tourner de 90° de telle façon qu'elle devienne normale au plan de l'orbite de la Terre?

Le lecteur pressent déjà la réponse: la Lune va tomber sur la Terre! Et sans tarder. M. Lidov a fait un calcul très précis par

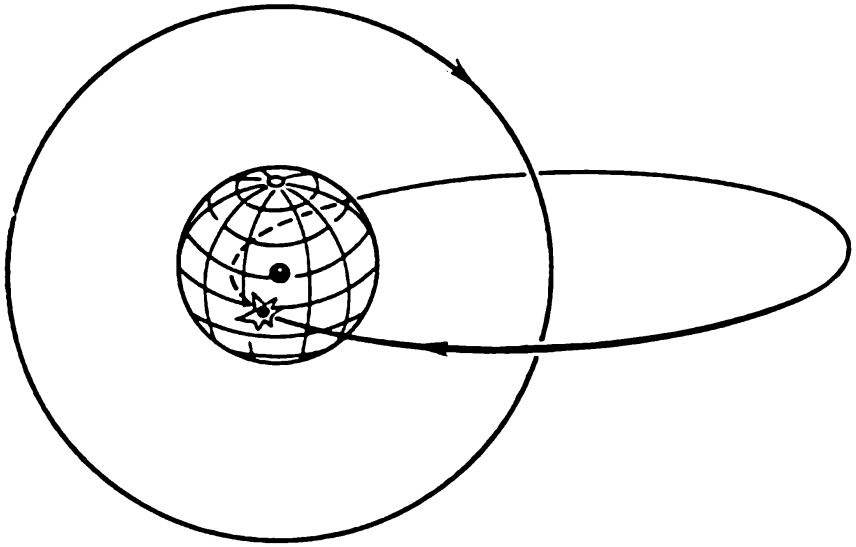


Fig. 4.2. Deux orbites à excentricités différentes

intégration numérique des équations du mouvement sur un ordinateur puissant. Les résultats de ce calcul sont illustrés sur la figure 4.3. On y voit les longueurs du demi-grand axe a et les distances r_π du périgée de l'orbite au centre de la Terre en fonction du nombre N des révolutions de la « Lune polaire » autour de la Terre. On remarque que si le demi-grand axe a reste constant comme prévu, r_π décroît en revanche irrésistiblement et, au bout de 55 révolutions tout au plus, devient plus petit que le rayon de la Terre! Autrement dit, si la Lune avait une telle orbite, elle ne durerait que quelques quatre ans et demi! (Il est instructif d'examiner la valeur estimée de la durée de vie d'une telle Lune, déduite par M. Lidov par la méthode de la moyenne: 52 révolutions. En la comparant avec la valeur exacte de la durée de vie on se rend compte que la méthode de la moyenne est capable non seulement de donner des résultats qualitatifs fidèles mais aussi de procurer des estimations quantitatives proches de la réalité.)

La découverte de la possibilité de la chute des satellites sur le corps central sous l'action des seules forces gravitationnelles est sans conteste une des découvertes les plus spectaculaires de la

mécanique. Même après que les premiers spoutniks ont été lancés, les chercheurs ne se rendaient pas compte très nettement de cette éventualité, ou ne s'en rendaient pas compte du tout. Déjà le *Lunik* photographiait la face cachée de la Lune quand un scientifique de renom a déclaré au cours d'une conférence publique (l'auteur était dans la salle) que le *Lunik* resterait éternellement sur son orbite, car le périgée est élevé et le mouvement n'est pas freiné par l'atmosphère. La chute du *Lunik*—inévitable — s'est produite quelques

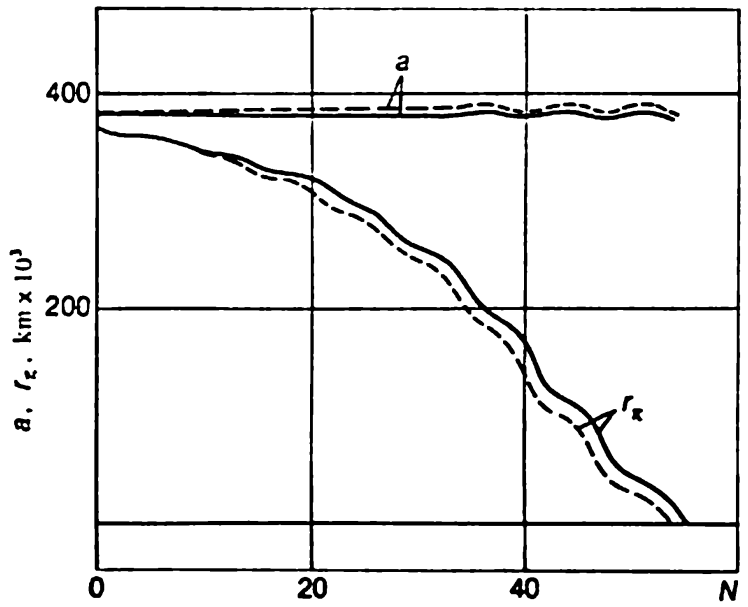


Fig. 4.3. Evolution des éléments de la « Lune polaire »

jours plus tard : son orbite était inclinée à environ 90° sur le plan de l'écliptique... Bientôt les travaux de M. Lidov [4.3, 4.4] ont vu le jour. Ils contenaient une analyse de l'évolution du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement et, en particulier, le « phénomène de chute » d'un corps sur la Terre. Ces travaux ont suscité un vif intérêt.

Après tout ce qui précède, on comprend que la coplanarité approximative de la plupart des planètes du système solaire et de leurs satellites n'est pas un fait du hasard : s'il y avait eu des corps sur orbites fortement inclinées, ils seraient tombés depuis belle lurette sur le Soleil...

Il est vrai que certains satellites d'Uranus gravitent sur des orbites fortement inclinés sur l'écliptique. Or, M. Lidov a montré [4.3] que les perturbations causées par le caractère non central du champ gravitationnel d'Uranus (c'est-à-dire par sa forme comprimée) compensent d'une façon stable les perturbations provoquées par l'attraction des autres corps. C'est donc la forme aplatie de la pla-

nète Uranus qui a empêché la perte de ses satellites. Le fait même de l'existence des satellites sur des orbites stables normales au plan de l'écliptique permet d'estimer la non-rotondité de la planète centrale. Pour les autres planètes les perturbations dues à l'aplatissement ne sont pas suffisamment grandes devant les perturbations qui proviennent des corps extérieures pour s'opposer à la chute des satellites non écliptiques sur le corps central.

Après avoir vu qu'une Lune gravitant sur une orbite posée « de champ » risque de tomber sur la Terre, le lecteur se sent peut-être pris d'angoisse en pensant à ce qui pourrait arriver à notre chère Lune réelle. Il n'y a pas de quoi se faire du mauvais sang : la Lune restera éternellement dans le ciel, aussi sereine qu'auparavant. Cette conclusion découle à peu près exactement du « théorème de Laplace» et avec toute la rigueur scientifique des travaux de V. Arnold dont nous parlerons plus tard.

Il convient de noter toutefois que nous avons parlé jusque-là de l'attraction des « masses ponctuelles » ; or, il y a dans la nature d'autres forces. Par exemple, les forces dites « des marées », causées par les grandes dimensions et la rigidité insuffisante des planètes, sont capables de les faire tourner plus vite sur leurs orbites ou de les ralentir, ce qui a pour effet un changement de la forme de l'orbite. Compte tenu des effets des marées, la conclusion sur la stabilité de l'orbite de la Lune perd légèrement sa force persuasive. Cette circonstance est décrite avec force détails et beaucoup d'imagination dans le livre de V. Diomine *Destin du système solaire* [4.5]. Quant aux spoutniks, les effets des marées ne sont pas très prononcés, et nous n'en parlerons plus.

3. Domaine du mouvement faiblement perturbé

L'analyse précédente et les conclusions sur l'évolution du mouvement ne sont bien sûr applicables qu'au mouvement képlérien faiblement perturbé. Si, au cours de l'évolution, un spoutnik se rapproche trop de la Lune, les perturbations causées par cette dernière deviendront si importantes que l'orbite sera « cassée », et les équations d'évolution (c'est-à-dire les équations mises en moyenne) cesseront d'être vraies. Toutes les conclusions précédentes sont donc vraies à condition que le satellite ne tombe pas dans un voisinage du corps perturbateur. Cette condition est vérifiée par exemple par toutes les orbites « intérieures » (le satellite artificiel de la Terre est suffisamment « enfoncé » à l'intérieur de l'orbite lunaire) ou par les orbites extérieures stables (l'orbite du satellite enferme celle de la Lune) ; une orbite extérieure instable peut conduire ou ne pas conduire le satellite au voisinage dangereux de la Lune. Or, pour les orbites extérieures, c'est l'influence perturbatrice du Soleil qui prédomine. L'existence d'orbites extérieures stables est un argument en faveur

de l'existence des systèmes planétaires stables autour des étoiles binaires dont nous avons parlé dans le premier essai.

Précisons la notion de « voisinage dangereux » du corps perturbateur, c'est-à-dire du domaine dans lequel le satellite ne doit pas pénétrer, au risque de voir les équations d'évolution tomber en défaut.

Considérons un système (fig. 4.4) de points matériels de masses m_0 (la Terre), m_1 (la Lune), m_2 (le spoutnik). A la fonction de forces

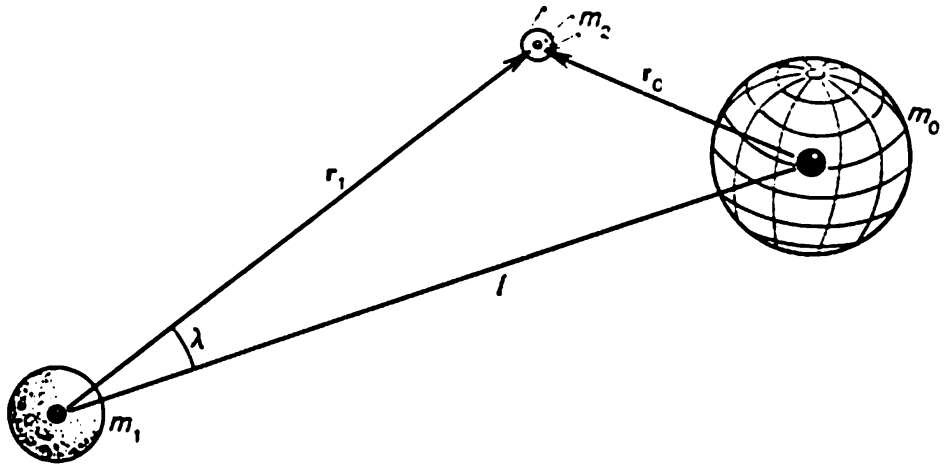


Fig. 4.4. Système de trois points de masses m_0, m_1, m_2

(4.1.2) correspondent alors une accélération principale $\mathbf{a}_0$ de m_2 causée par l'attraction de la Terre et une accélération perturbatrice $\mathbf{f}_0$ due à l'attraction de la Lune:

$$\mathbf{a}_0 = -f\frac{m_0+m_2}{r_0^3}\mathbf{r}_0, \quad \mathbf{f}_0 = fm_1\left(\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0}{l^3} - \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3}\right). \tag{4.3.1}$$

Ici $\mathbf{r}_0$ est le rayon vecteur géocentrique du spoutnik, $\mathbf{r}_1$ son rayon vecteur sélénocentrique, l la distance de la Lune à la Terre. On peut cependant considérer le même mouvement du spoutnik par rapport à la Lune, sous l'action d'une accélération principale $\mathbf{a}_1$ et d'une accélération perturbatrice $\mathbf{f}_1$:

$$\mathbf{a}_1 = -f\frac{m_1+m_2}{r_1^3}\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{f}_1 = fm_0\left(\frac{\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1}{l^3} - \frac{\mathbf{r}_0}{r_0^3}\right). \tag{4.3.2}$$

Si la quantité

$$\varepsilon_0 = \frac{|\mathbf{f}_0|}{|\mathbf{a}_0|} \tag{4.3.3}$$

est suffisamment petite, le mouvement est voisin d'un mouvement képlérien non perturbé autour de la Terre. Au contraire, si la quantité

$$\varepsilon_1 = \frac{|\mathbf{f}_1|}{|\mathbf{a}_1|} \tag{4.3.4}$$

est suffisamment petite, le mouvement est voisin d'un mouvement képlérien non perturbé au voisinage de la Lune. Plus le rapport

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \tag{4.3.5}$$

est petit, plus le mouvement est proche d'un mouvement képlérien autour de la Terre. En effet, si la quantité ε_0 diminue, la quantité ε_1 commence à croître et le mouvement devient de plus en plus proche d'un mouvement autour de la Terre et de plus en plus différent d'un mouvement autour de la Lune. Une telle variation de ε_0 et de ε_1 a pour effet une diminution de ε.

Considérons à présent la surface de ε = Cte. Elle doit partager l'espace en domaines « permis » et « interdit » pour les équations d'évolution ; le domaine « interdit » doit couvrir le voisinage de la Lune, tandis que dans le domaine « permis » les équations d'évolution décrivent le mouvement (conformément aux principes généraux des méthodes asymptotiques) avec une précision d'ordre ε sur un intervalle de temps d'ordre $1/\varepsilon$. Une telle surface sera appelée *ε-surface*.

Elevons (4.3.5) au carré et, après quelques transformations bien simples, en négligeant la masse m_2 qui est infime devant m_0 et m_1, nous obtiendrons

$$m_1^4 r_0^4 \left(\frac{1}{l^4} + \frac{1}{r_1^4} - \frac{2}{l^2 r_1^2} \cos\lambda\right) = \\ = \varepsilon^2 m_0^4 r_1^4 \left[\frac{1}{l^4} + \frac{1}{r_0^4} + \frac{2\,(l r_1 \cos\lambda - l^2)}{l^3 r_0^3}\right], \tag{4.3.6}$$

où λ est l'angle entre les directions Lune-Terre et Lune-spoutnik (fig. 4.4) et

$$r_0^2 = l^2 + r_1^2 - 2 r_1 l \cos\lambda. \tag{4.3.7}$$

Les formules (4.3.6), (4.3.7) définissent une ε-surface $r_1(\lambda)$.

La formule (4.3.6) est compliquée mais peut facilement être simplifiée. Il est logique de supposer que l'ε-surface délimite autour de la Lune un domaine restreint (par rapport à la distance Lune-Terre), si bien que r_1/l est petit. Réduisons (4.3.6) au même dénominateur et faisons le développement suivant les puissances de r_1/l. Seuls seront retenus les termes de plus bas degré en r_1/l. Il vient

$$\frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^4 = \left(\frac{r_1}{l}\right)^{10} (1 + 3\cos^2\lambda). \tag{4.3.8}$$

C'est une surface de révolution qui ressemble beaucoup à une sphère. En effet, pour $\cos\lambda = 0$ on a $r_1 = r_1^{\max}$ et pour $\cos^2\lambda = 1$ on a $r_1 = r_1^{\min}$, le rapport de la plus grande dimension $r_1^{\max}$ de la surface à sa plus petite dimension $r_1^{\min}$ étant $\sqrt[5]{2} \approx 1{,}15$. On prend donc

pour l'ε-surface la sphère

$$r_1 = l\left(\frac{m_1}{m_0}\right)^{2/5} \frac{1}{\sqrt[5]{\varepsilon}}. \tag{4.3.9}$$

Si donc la trajectoire du spoutnik ne pénètre jamais, au cours de son évolution, dans le voisinage de la Lune défini par la sphère (4.3.9), nos équations d'évolution (mises en moyenne) fourniront une solution qui ne différera de la solution exacte que d'une quantité d'ordre ε, et de surcroît sur un intervalle de temps nettement prolongé (en général d'ordre 1/ε *)).

Pour ε = 1 l'équation (4.3.9) définit une sphère largement utilisée en mécanique du vol spatial, dite *sphère d'influence* [4.6]. Si le spoutnik est tombé dans la sphère d'influence lunaire, on doit le considérer déjà comme un satellite de la Lune (tant qu'il reste dans sa sphère). Une fois sorti de la sphère de la Lune, le spoutnik peut de nouveau être considéré comme un satellite de la Terre.

Nous ne parlons du système Lune-Terre que pour fixer les idées. En réalité, on peut examiner aussi d'autres systèmes, par exemple le système Terre-Soleil. Alors la formule (4.3.9) définira l'ε-sphère (et la sphère d'influence pour ε = 1) de la Terre par rapport au Soleil. On voit dans le tableau ci-après les rayons r_1 des ε-sphères et des sphères d'influence de la Lune (par rapport à la Terre) et de la Terre (par rapport au Soleil):

	ε = 1	ε = 0,1	ε = 0,01	ε = 0,001
Lune	66 280 km	105 050 km	166 360 km	263 790 km
Terre	924 820 km	583 490 km	368 460 km	232 370 km

Dans ce tableau les rayons de l'ε-sphère sont calculés pour un spoutnik perturbé soit par la Lune (première ligne), soit par le Soleil (deuxième ligne). C'est pourquoi, avec la diminution de ε, les rayons croissent dans la première ligne (la zone interdite autour de la Lune augmente) et décroissent dans la seconde (la zone permise autour de la Terre se rétrécit). Il est évident que les valeurs figurant en deuxième ligne sont calculées en prenant dans la formule (4.3.9) la quantité ε^{-1} au lieu de ε. Fait curieux, il existe pour ε = 0,1 un domaine permis qui couvre la Lune aussi bien que la Terre et dans lequel un spoutnik est aussi « peu » influencé (ε ~ 0,1) par la Lune que par le Soleil. Pour ε = 0,01 il n'existe aucune orbite « extérieure » faiblement perturbée qui puisse enfermer et la Lune et la Terre (fig. 4.5).

*) Nous verrons plus tard que cet intervalle de temps peut aussi être infini, ε restant fini.

Les paramètres qui ont servi au calcul du tableau précédent sont :

	m_0/m_1	l
Lune/Terre	81,35	384 300 km
Terre/Soleil	332 400	149 598 500 km

Remarquons qu'on utilise aussi en mécanique du vol spatial des sphères gravitationnelles calculées sur d'autres principes [4.7].

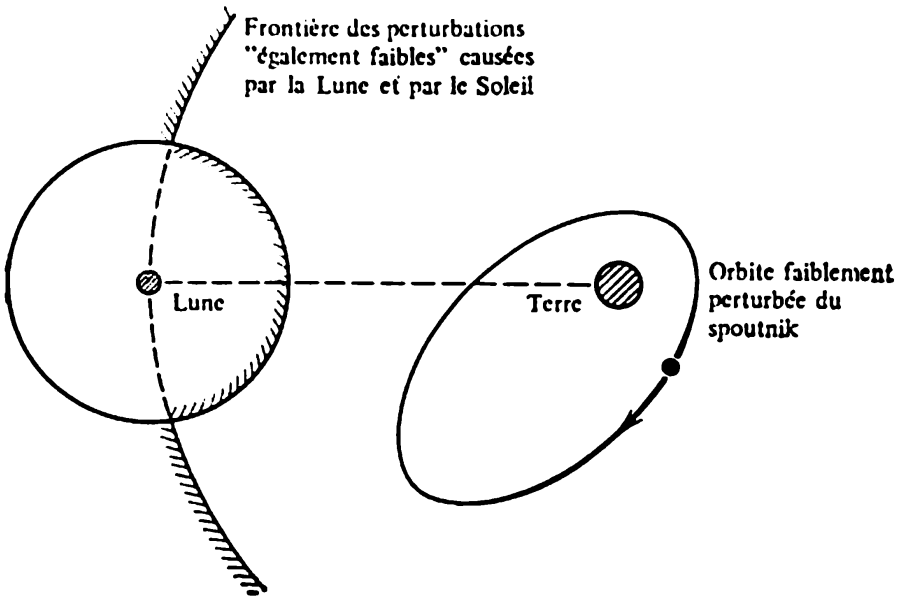


Fig. 4.5. Domaine du mouvement faiblement perturbé

Nous aurons de nouveau besoin de la notion de sphère d'influence quand nous analyserons les trajectoires passant au voisinage de la Lune.

4. Stabilité du système solaire

Toutes les conclusions précédentes sur la stabilité et l'évolution des orbites de planètes, tirées des équations d'évolution mises en moyenne, donc peu précises, deviennent précaires quand il s'agit de la stabilité à l'infini.

Rappelons qu'en posant le problème de la « stabilité du système solaire », nous avons sous-entendu le problème mathématique de la stabilité des trajectoires des n points matériels qui s'attirent deux à deux suivant la loi de Newton, en supposant qu'un point (le Soleil)

est beaucoup plus massif que tous les autres. Aucune force n'a été considérée, à l'exception des attractions newtoniennes réciproques.

Ainsi posé, le problème a résisté pendant deux siècles aux efforts des mathématiciens les plus éminents.

Or, dès 1961 le jeune mathématicien soviétique V. Arnold publiait ses résultats fondamentaux qui allaient marquer une étape décisive dans la résolution du problème. Fondés sur certaines idées de l'académicien A. Kolmogorov, ces résultats se présentent comme une analyse générale du comportement des solutions des systèmes canoniques. Les résultats sur le comportement du système solaire en sont justement un cas particulier.

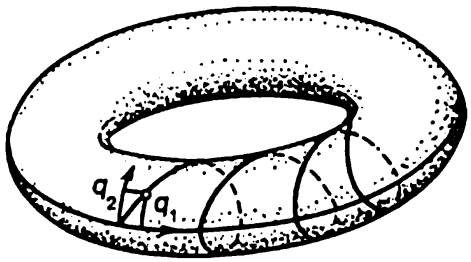


Fig 4.6. Tore du mouvement quasi périodique non perturbé

Considérons un système canonique de hamiltonien

$$H(p, q) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q, \varepsilon),$$

où p, q sont des vecteurs à n dimensions, ε est petit, H_1 est périodique en q de période 2π. Si $\varepsilon = 0$, le mouvement se définit par les équations

$$\dot{p} = 0, \quad \dot{q} = \omega(p),$$

où $\omega(p) = \partial H_0/\partial p = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ et peut être représenté sur un tore $p = \text{Cte}$ à n dimensions par un « enroulement » $q(t)$ de ce tore.

Le cas bidimensionnel est illustré sur la figure 4.6. Sur le tore à deux dimensions (un « pneu ») on marque la longitude q_1 et la latitude q_2. Une variation uniforme simultanée de q_1 avec la vitesse ω_1 et de q_2 avec la vitesse ω_2 fait naître une trajectoire qui s'enroule autour du tore. Si ω_1 et ω_2 sont incommensurables, on montre que la trajectoire est partout dense sur le tore *). Un tel mouvement est appelé *conventionnellement périodique* ou *quasi périodique*. Par contre, si $\omega_1/\omega_2 = m/n$, m et n entiers, la trajectoire se fermera au bout d'un temps $t = 2\pi m/\omega_1 = 2\pi n/\omega_2$. Dans ce cas le mouvement est périodique. De même, dans le cas à n dimensions, pour $\omega_1 k_1 + \ldots + \omega_n k_n = 0$, où k_i sont des entiers dont deux quelconques au moins sont non nuls, la trajectoire sera périodique et fermée sur le tore à n dimensions, et si $\omega_1 k_1 + \ldots + \omega_n k_n \neq 0$, le mouvement sera quasi périodique et la trajectoire $q_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sera partout dense sur le tore $p_i = \text{Cte}$ à n dimensions.

Voyons maintenant la « partie perturbatrice » εH_1 du hamiltonien H. Soit ε suffisamment petit. Peut-on affirmer que le mouve-

*) Cela signifie que le point mobile se trouvera tôt ou tard à l'intérieur d'un domaine aussi petit que l'on veut sur le tore.

ment restera proche du mouvement périodique ou quasi périodique de départ? Autrement dit, les tores initiaux du mouvement non perturbé sont-ils conservés ou détruits?

Si les tores initiaux ne sont pas détruits mais « légèrement déformés », le mouvement perturbé est séculairement proche du mouvement non perturbé. En mouvement perturbé ($\varepsilon \neq 0$) les p_i ne sont pas constants (« tore déformé ») mais proches de $p_i^0 = \text{Cte}$ (« tore non déformé ») qui correspondent au mouvement non perturbé ($\varepsilon = 0$). Pour s'assurer que les trajectoires du mouvement perturbé diffèrent peu de celles du mouvement non perturbé, il suffit (!) de construire, au voisinage du mouvement non perturbé, des séries qui définiraient le mouvement perturbé et qui seraient convergentes pour ε petit. Facile en apparence, ce problème fut la pierre d'achoppement des mathématiciens les plus chevronnés pendant deux centaines d'années; seul Arnold fut à même de « gonfler » ce « pneu » (le tore du mouvement perturbé) comme il faut.

Suivant l'idée de A. Kolmogorov, V. Arnold construisit des approximations successives du type de la « méthode de Newton » (analogue à la méthode des tangentes pour la recherche des racines d'équations algébriques). En k-ième approximation cette méthode donne une erreur d'ordre ε^{2^k}; pour $k \to \infty$, on a donc une convergence rapide. En développant une démonstration rigoureuse, Arnold eut à surmonter des difficultés vraiment sérieuses. Examinons-en quelques-unes.

1. *Les résonances.* Si en mouvement non perturbé on a $\sum k_i \omega_i = 0$, les trajectoires du mouvement perturbé peuvent se situer en dehors du tore dans le cas général: le tore est détruit. Même si l'on arrive à construire les séries convergentes définissant le mouvement perturbé, elles n'existent pas dans tout l'espace de phases mais seulement dans quelques « couches » de l'espace. Plus exactement, on a montré que de telles séries existent au voisinage des tores non perturbés avec des mouvements quasi périodiques (mais non périodiques!).

Deuxième difficulté due aux résonances: les séries définissant le mouvement perturbé contiennent des dénominateurs de la forme $\sum k_i \omega_i$ qui deviennent petits aussitôt que les fréquences se rapprochent de celles de résonance. La petitesse des dénominateurs empêche la convergence des séries.

Ces difficultés sont contournées dans le théorème de Kolmogorov dont la démonstration complète a été effectuée par Arnold [4.8]. La convergence du type newtonien (ε^{2^k}) « neutralise » l'influence néfaste des dénominateurs.

Or, en appliquant les résultats de l'analyse des systèmes hamiltoniens au problème de la stabilité des orbites planétaires, on se heurte à d'autres difficultés, qui ont aussi été surmontées par Arnold

dans son théorème dérivant de celui de Kolmogorov. Signalons ces difficultés.

2. *La dégénérescence propre.* On entend par là un cas éventuel où il y a en mouvement perturbé plus de fréquences qu'en mouvement non perturbé. Rappelons que le « mouvement lagrangien des planètes » contient plus de fréquences que le mouvement képlérien : en plus des « fréquences » rapides des mouvements képlériens des planètes sur leurs orbites, on y trouve aussi les « fréquences » lentes de précession des périhélies des planètes et des nœuds ascendants de leurs orbites.

Pour surmonter cette difficulté il faut considérer comme non perturbé un mouvement « nouveau », par exemple remplacer le mouvement képlérien par le mouvement lagrangien, qui est plus précis.

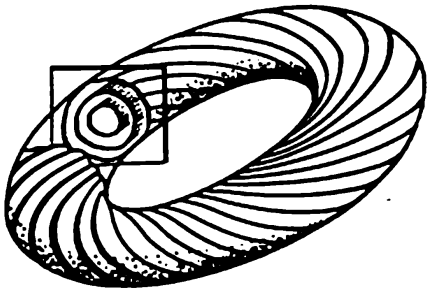


Fig. 4.7. Tores des mouvements quasi périodiques perturbés

3. *La dégénérescence limite.* Cette appellation s'applique au cas suivant. Parmi les tores $p = \text{Cte}$ à n dimensions du mouvement non perturbé, on rencontre des tores de dimension $k < n$, par exemple la position d'équilibre $k = 0$ et le mouvement périodique à fréquence unique $k = 1$.

Après des recherches abondantes et dures, V. Arnold a abouti à un théorème [4.9] dont les grandes lignes sont les suivantes :

Le mouvement perturbé défini par un système hamiltonien est pour la plupart des données initiales quasi périodique et reste éternellement proche d'un mouvement quasi périodique « non perturbé » convenablement choisi.

La réserve essentielle « pour la plupart des données initiales » sous-entend qu'*en mouvement perturbé tous les tores du mouvement non perturbé sont conservés, sauf peut-être les tores à fréquences de résonance avec leur petit voisinage.* Ces derniers tores sont détruits en général dans le mouvement perturbé. Le tableau d'ensemble du mouvement perturbé se réduit aux mouvements quasi périodiques sur les tores conservés (légèrement déformés), les espaces entre ces tores étant remplis de débris de tores détruits (fig. 4.7).

On connaît peu de chose sur le comportement des trajectoires dans les « interstices ». Si le problème est à deux degrés de liberté, l'intégrale de l'énergie $H = \text{Cte}$ fait naître une variété tridimensionnelle partagée par les tores des mouvements quasi périodiques (fig. 4.7). Les trajectoires coincées entre les tores ne peuvent pas sortir des interstices : en effet, elles ne peuvent pas traverser les tores des mouvements quasi périodiques car le mouvement est défini de façon univoque par les données initiales. Or, puisque l'espace entre les tores est d'autant plus exigu que ε est faible, *on peut affirmer*

que dans un système à deux degrés de liberté même les mouvements résonants sont stables. Dans les systèmes qui ont plus de degrés de liberté la dimension des tores des mouvements quasi périodiques est d'au moins deux unités plus petite que celle de l'espace de phases. Ces tores ne partagent pas l'espace ; on peut les comparer à une forêt aussi dense que l'on veut ; un écureuil descendu sur le sol peut tourner aussi longtemps que l'on veut entre les trois arbres voisins (c'est la stabilité) mais il peut tout aussi bien s'en aller aussi loin que l'on veut entre les arbres (c'est l'instabilité). Un autre écureuil peut cependant courir sur le tronc d'un seul arbre en mouvement quasi périodique, qui reste stable même s'il y a du vent *).

Parmi les applications du théorème d'Arnold citons un résultat fort. Supposons que les masses des planètes soient faibles devant celle d'un astre central (le Soleil). Alors, si les excentricités et les inclinaisons des orbites sont suffisamment petites, *pour la plupart des conditions initiales le mouvement réel de chaque planète est quasi périodique et reste éternellement proche d'un mouvement lagrangien convenablement choisi. De plus, les excentricités et les inclinaisons resteront éternellement petites, et les longueurs des demi-grands axes des orbites, éternellement voisines de leurs valeurs initiales.* Autrement dit, le « théorème de Laplace » reste vrai à l'infini.

Puisque nous avons établi précédemment le « théorème de Laplace » par la méthode de la moyenne nous voyons que dans certains cas (non négligeables) la méthode de la moyenne cerne la réalité du mouvement d'assez près, et ce, dans un intervalle de temps infiniment prolongé.

La « plupart des conditions initiales » indiquée plus haut *exclut*, répétons-le, *les rapports de résonance entre les fréquences des mouvements.*

Les résultats de V. Arnold ne peuvent être surestimés. Ils ont été obtenus grâce à des idées riches et profondes dont la réalisation a nécessité un travail vraiment énorme. Seuls les énoncés des lemmes et des théorèmes occupent parfois des pages entières. Arnold lui-même ne ménage pas ses expressions à ce propos : « Nous mettrons en œuvre, dit-il, l'effrayant appareil formel de la dynamique » ([4.9], p. 94) **).

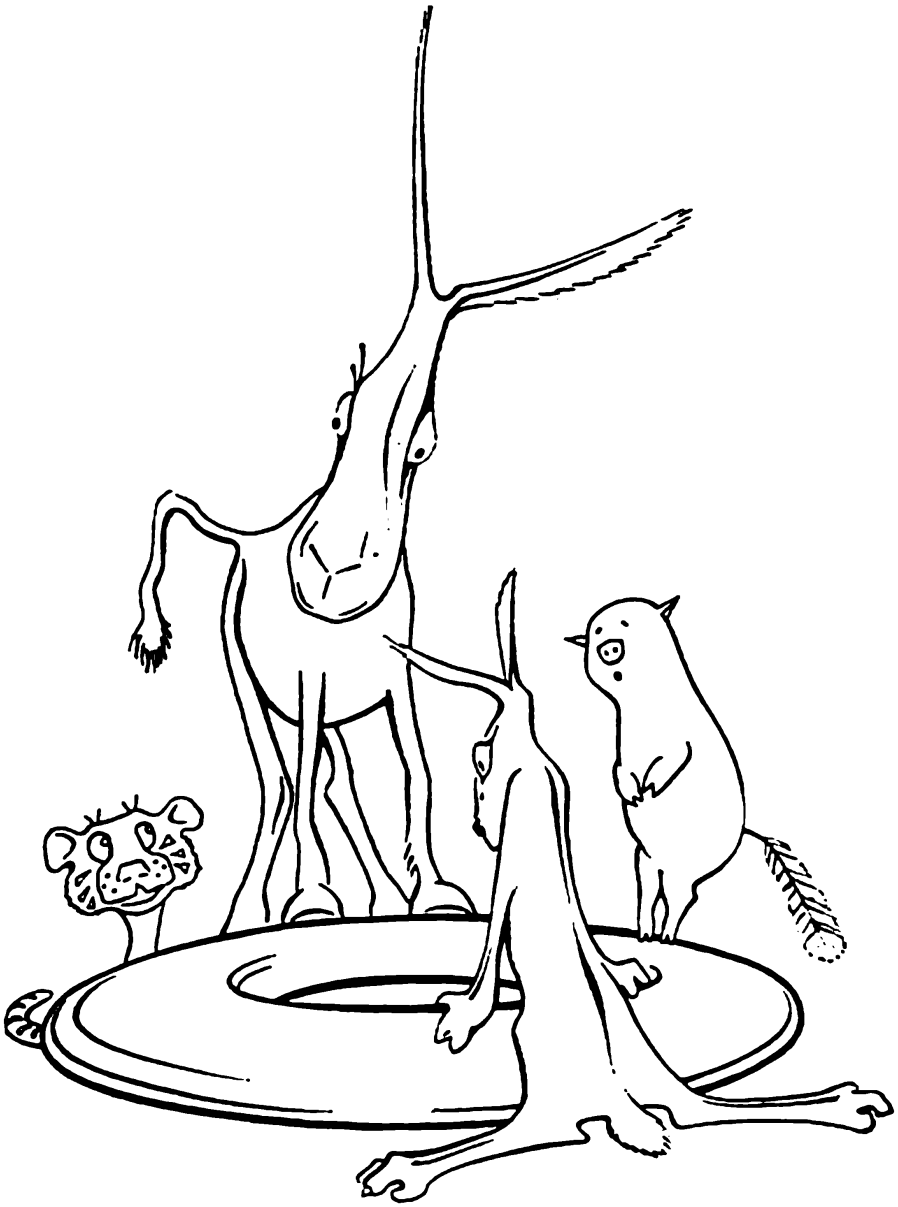
Un problème qui a résisté pendant deux siècles ne cède pas facilement. Il a fallu les efforts des mathématiciens les plus éminents de notre siècle : H. Poincaré, G. Birkhoff, A. Kolmogorov, K. L. Sie-

*) Voir aussi l'article de N. Nekhorochev *Sur le comportement des systèmes hamiltoniens proches de systèmes intégrables* in *Founktsionalni analiz*, 1971, n° 4.

**) « Hi-Han, le vieux bourriquet gris, se tenait un jour au bord d'un ruisseau et examinait tristement son image dans l'eau.

— Pathétique, dit-il enfin. Oui. C'est pathétique. »

A. A. Milne
Winnie l'ourson



gel, J. Moser, pour que cette forteresse s'ouvre devant les théorèmes d'Arnold et de Kolmogorov et fournisse la solution du problème de la stabilité des mouvements d'un système de corps gravitants.

Il reste cependant à voir si ces résultats sont applicables à tel ou tel cas concret, par exemple à notre système solaire.

5. Le système solaire est-il en résonance ?

Les difficultés qui surgissent quand on essaie de construire des séries convergentes définissant le mouvement perturbé en mécanique céleste tiennent essentiellement au fait qu'il y a des fréquences approximativement commensurables. Par exemple, en prenant la fréquence de révolution (moyen mouvement) de Jupiter autour du Soleil ω_{Jup} égale à 1, la fréquence de révolution (moyen mouvement) de Saturne ω_{Sat} sera égale à 0,4027, d'où

$$2\omega_{Jup} - 5\omega_{Sat} = -0{,}0135. \qquad (4.5.1)$$

On voit que les fréquences de révolution de Jupiter et de Saturne sont approximativement commensurables (résonance $\omega_{Jup}/\omega_{Sat} = 5/2$).

A. Moltchanov a avancé une hypothèse remarquable. Dans le courant de l'évolution, pense-t-il avec raison, il est nécessaire de prendre en considération les petites forces dissipatives. Ce peuvent être, dans le système solaire, les forces des marées, les forces de freinage par la poussière interplanétaire et d'autres forces, peut-être inconnues jusqu'à présent, qui provoquent la dissipation de l'énergie.

Nous savons que les perturbations dues à l'interaction des planètes sont très faibles, elles sont cependant très supérieures aux forces dissipatives. Or, en s'exerçant durant des milliards d'années, les forces dissipatives changent systématiquement les orbites et amènent le mouvement des planètes à des orbites stationnaires qui, elles, demeurent pratiquement inchangées au cours des milliards d'années qui viennent.

Jusqu'à présent nous n'avons dit rien d'original. « Tout cela, on le sait depuis longtemps. » Le point original, c'est que, d'après l'hypothèse de Moltchanov, *les orbites stationnaires définitives doivent être en résonance* ! « Tout système oscillatoire ayant subi une évolution prolongée est nécessairement en résonance et est régi par une famille de nombres entiers », écrit A. Moltchanov. Il avance en particulier l'hypothèse selon laquelle *le système solaire est en résonance complète* : les fréquences de révolution (moyens mouvements) des planètes sont très proches des fréquences pour lesquels A. Moltchanov a trouvé un *système complet de résonances* (il s'agit des neuf grandes planètes connues). Il a fait mieux et découvert des résonances analogues pour certains satellites des planètes. A. Moltchanov a publié des tableaux correspondants dans la revue internationale *Icarus*

consacrée aux problèmes du système solaire [4.10], d'où nous avons tiré les tableaux ci-après *).

Le tableau 4.1 contient des entiers n_i — positifs, négatifs et nuls — tels que

$$\sum_{i=1}^{9} n_i\omega_i = 0,$$

où ω_i sont les fréquences de révolution (moyens mouvements) des grandes planètes du système solaire. On adopte comme ω_i des valeurs « théoriques » ω_i^t des fréquences qui vérifient exactement les relations de résonance

$$\sum_i n_i\omega_i = 0,$$

mais on marque à côté les valeurs observées réelles ω_i^{obs} des fréquences des planètes et l'on écrit les rapports

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\omega_i^{obs} - \omega_i^t}{\omega_i^{obs}}$$

qui caractérisent l'écart de la fréquence réelle par rapport à la fréquence de résonance : le rapport est toujours petit !

Des tableaux analogues ont été composés pour les systèmes de satellites de Jupiter, de Saturne, d'Uranus (tableau 4.2).

Ils semblent assez convainquants. L'écart entre la fréquence réelle et la fréquence de résonance ne dépasse guère 1,5 %. Ce sont en règle générale les planètes les plus rapprochées (ou les satellites les plus voisins des planètes) qui se trouvent en résonance entre elles.

Etant obligé d'exprimer les fréquences de façon approchée au moyen de suites décimales limitées (c'est-à-dire de nombres rationnels), on peut toujours en principe choisir des nombres entiers n_i suffisamment grands en module de façon à vérifier les rapports de résonance pour les fréquences. Or, les tableaux de Moltchanov contiennent des $|n_i|$ *petits*, ce qui est un argument de plus en leur faveur. La courbe de la figure 4.8 illustre la distribution de la quantité N des $|n_i|$ dans les tableaux de Moltchanov en fonction de la valeur de ces nombres. On remarque que les $|n_i|$ se concentrent autour de valeurs petites. Il y a donc peu de chances pour que les rapports de résonance découverts soient un fait du hasard.

La question de la stabilité du système solaire réel peut être liée, en vertu de ce qui précède, justement aux mouvements résonants négligés dans la théorie d'Arnold (ce qui ne diminue en rien, soit dit en passant, la portée de cette théorie remarquable). D'autre part, l'hypothèse de Moltchanov pose plus de questions qu'elle

*) Les dernières lignes de ces tableaux ont été construites de façon à assurer l'égalité formelle à 1 du déterminant correspondant.

Tableau 4.1

Rapports de résonance dans le système solaire

	Planète	ω_i^{obs}	ω_i^t	$\Delta\omega/\omega$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9
1	Mercure	49,22	49,20	0,0004	1	—1	—2	—1	0	0	0	0	0
2	Vénus	19,29	19,26	0,0015	0	1	0	—3	0	—1	0	0	0
3	Terre	11,862	11,828	0,0031	0	0	1	—2	1	—1	1	0	0
4	Mars	6,306	6,287	0,0031	0	0	0	1	—6	0	—2	0	0
5	Jupiter	1,000	1,000	0,0000	0	0	0	0	2	—5	0	0	0
6	Saturne	0,4027	0,400	0,0068	0	0	0	0	1	0	—7	0	0
7	Uranus	0,14119	0,14286	—0,0118	0	0	0	0	0	0	1	—2	0
8	Neptune	0,07197	0,07143	0,0075	0	0	0	0	0	0	1	0	—3
9	Pluton	0,04750	0,04762	—0,0025	0	0	0	0	0	1	0	—5	1

Tableau 4.2

Rapports de résonance dans les systèmes de satellites des planètes

Satellites de Jupiter

	Satellite	ω_i^{obs}	ω_i^t	$\Delta\omega/\omega$	n_1	n_2	n_3	n_4
1	Io	4,044	4,000	0,0110	1	—2	0	0
2	Europe	2,015	2,000	0,0075	0	1	—2	0
3	Ganymède	1,000	1,000	0,0000	0	0	—3	7
4	Callisto	0,4288	0,4285	0,0008	0	0	—1	2

Satellites de Saturne

	Satellite	ω_i^{obs}	ω_i^t	$\Delta\omega/\omega$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8
1	Mimas	16,918	16,800	0,0070	—1	0	2	0	0	0	0	0
2	Encelade	11,639	11,600	0,0035	0	—1	0	2	0	0	0	0
3	Téthys	8,448	8,400	0,0057	0	0	—1	0	2	1	0	2
4	Dioné	5,826	5,800	0,0045	0	0	0	—1	2	—1	0	—1
5	Rhéa	3,530	3,500	0,0086	0	0	0	0	—1	2	2	0
6	Titan	1,000	1,000	0,000	0	0	0	0	0	—3	4	0
7	Hypérion	0,7494	0,7500	0,0008	0	0	0	0	0	—1	0	5
8	Japet	0,2010	0,2000	0,0050	0	0	0	0	0	0	—1	4

Satellites d'Uranus

	Satellite	ω_i^{obs}	ω_i^t	$\Delta\omega/\omega$	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	Miranda	6,529	6,545	—0,0025	—1	1	1	1	0
2	Ariel	3,454	3,454	0,0000	0	—1	1	2	—1
3	Umbriel	2,100	2,091	0,0043	0	0	—2	1	5
4	Titania	1,000	1,000	0,0000	0	0	1	—4	3
5	Obéron	0,6466	0,6364	0,0160	0	0	1	—2	0

n'en résout. Le système des « petits » nombres résonants trouvés par Moltchanov est-il le seul possible ou peut-on en trouver un autre, également valable ? En effet, la non-nullité des relations de résonance entre les fréquences *observées* (et non choisies artificiellement) peut devenir notable par rapport aux plus petites fréquences du système

solaire. Il suffit de comparer par exemple l'écart 0,0135 de la résonance (4.5.1) avec les fréquences 0,07197 et 0,04750 de révolution de Neptune et de Pluton.

Pourquoi l'évolution du système a-t-elle « abouti» à ces résonances plutôt qu'à d'autres ? Quel est enfin le mécanisme exact de l'« aboutissement » du système à la résonance ? Rappelons que l'hypothèse de Moltchanov reste encore une *hypothèse*, car personne n'a démontré avec toute la rigueur mathématique nécessaire qu'un système oscillant aboutit toujours, sous certaines conditions (lesquelles ?) à une résonance, et encore moins que ce sera une *résonance complète* *).

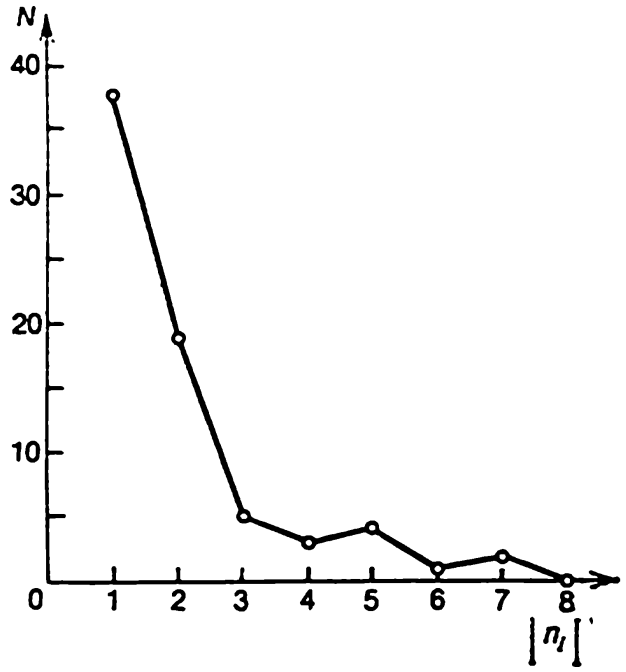


Fig. 4.8. Distribution des nombres de résonance du système solaire

On sait bien pour l'avoir observé que les astéroïdes « évitent » d'emprunter certaines orbites qui sont en résonance (avec Jupiter) ; les interstices séparant les anneaux de Saturne ont eux aussi une structure de résonance. En 1974 le jeune mathématicien moscovite A. Bruno montrait [4.11] que dans les systèmes canoniques un régime périodique stable est d'autant moins probable que l'ordre de la résonance est plus petit **). La figure 4.9 tirée de [4.12] illustre la distribution du nombre des astéroïdes en fonction de leur moyen mouvement journalier n ; en abscisses sont portées les valeurs de n en secondes d'arc par jour, et en ordonnées, le nombre des astéroïdes groupés dans des intervalles de 5″ du moyen mouvement pour un jour. On remarque en haut le rapport n/n_{Jup}, où $n_{\text{Jup}} = 300''$ est le moyen mouvement journalier de Jupiter. L'ordre de la résonance est égal à la différence entre le numérateur et le dénominateur de

*) On trouve beaucoup de données intéressantes sur les phénomènes de ce type dans la nature et en technique, ainsi que sur les fondements théoriques de tels phénomènes, dans le livre de I. Blekhman *Synchronisation des systèmes dynamiques*, Moscou, Naouka, 1971 (en russe).

**) Soient n le moyen mouvement journalier de l'astéroïde et n_{Jup} celui de Jupiter. Alors la vitesse angulaire moyenne relative de l'astéroïde est $n - n_{\text{Jup}}$. Si le rapport $n_{\text{Jup}}/(n - n_{\text{Jup}}) = p/q$, où $q > 0$ et p, q sont deux entiers premiers entre eux, c'est la quantité q que Bruno appelle *ordre de la résonance*.

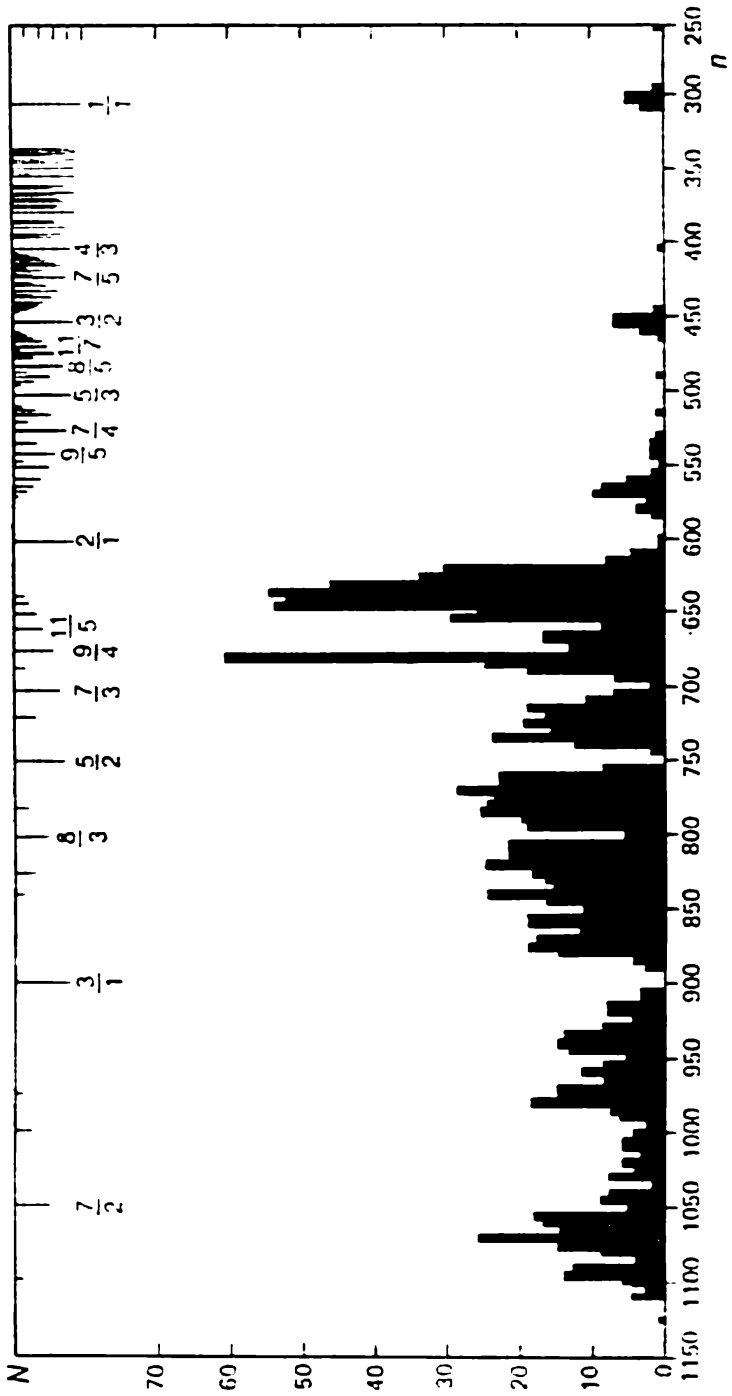


Fig. 4.9. Distribution du nombre des astéroïdes

chaque rapport. A. Bruno a montré que la nature des intervalles observés (vides) dans la distribution des astéroïdes est en bon accord qualitatif avec sa théorie. Pour l'ordre 3 ($n/n_{\text{Jup}} = 5/2$) le vide est total: un mouvement périodique éventuel est toujours instable, ce qui explique l'absence de tels mouvements. Plus l'ordre est élevé, moins le vide est parfait, car un mouvement stable devient de plus en plus probable: en fonction des conditions initiales le mouvement peut être stable ou — avec une probabilité de plus en plus faible — instable.

Comment concilier l'hypothèse sur les résonances obligatoires du système solaire avec le manque de désir manifeste des astéroïdes de suivre des orbites résonantes? Il est possible que les mouvements résonants soient « les trajectoires singulières » du système et, par analogie aux « points singuliers » des équations différentielles, elles peuvent être stables ou instables. C'est pourquoi le système au cours de son évolution s'éloigne de certaines résonances (instables) et aboutit à d'autres (stables).

Le rôle particulier joué par les résonances dans le système Solaire se fait voir aussi dans le mouvement de rotation des planètes autour de leurs axes. Tout le monde sait que la Lune présente toujours la même face à la Terre: un bel exemple de résonance 1/1 entre la période de révolution et la période de rotation. Nous aurons encore l'occasion d'en parler dans un autre essai. La fin des années soixante a apporté de nouvelles données sur la rotation propre de Mercure et de Vénus sur eux-mêmes. La détection radar [4.13] a révélé que la période de révolution de Mercure autour du Soleil et sa période de rotation sur lui-même sont dans le rapport $T_{\text{rév}}/T_{\text{rot}} = 2/3$! Pour Vénus, la résonance est vraiment extraordinaire: chaque fois que la Terre et Vénus se rapprochent au maximum, cette dernière présente la même face à la Terre! Autrement dit, la rotation de Vénus sur elle-même est en résonance non avec sa révolution mais avec son mouvement par rapport à l'axe Soleil-Terre qui tourne pourtant dans l'espace!

Selon les dernières télédétections, la période de rotation de Vénus est $T_{\omega}^{\text{Vén}} = 243{,}24 \pm 0{,}03$ j, ce qui correspond, à l'erreur de mesure près, à la valeur de 243,16 j pour laquelle Vénus présente la même face à la Terre en chaque conjonction inférieure. La période de révolution synodique est $\tau = 583{,}92$ j. Pendant cette période la Terre aura décrit sur son orbite un arc

$$\alpha_{\text{Ter}} \approx 2\pi + 2\pi \cdot 0{,}6 = \omega_{\text{Ter}}\tau,$$

où ω_{Ter} est le moyen mouvement de la Terre pour un jour.

Quant à Vénus, elle aura décrit dans son mouvement orbital un arc

$$\alpha_{\text{Vén}} = 2\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 0{,}6 = \omega_{\text{Vén}}\tau;$$

en tournant sur elle-même dans le sens *rétrograde* (c'est-à-dire dans le sens opposé à la révolution) avec la vitesse angulaire Ω, Vénus aura tourné pendant le temps τ d'un angle $\beta = -2\pi \cdot 3 + 2\pi \cdot 0{,}6 = -\Omega\tau$.

Les trois angles α_{Ter}, $\alpha_{\text{vén}}$, β auront donc pris, pendant le temps τ, des valeurs à peu près égales à $2\pi \cdot 0{,}6$ (aux multiples de 2π près). Retranchant cette dernière égalité des deux précédentes, on voit que

$$5\,\frac{2\pi}{\tau} = \omega_{\text{vén}} + \Omega, \quad 4\,\frac{2\pi}{\tau} = \omega_{\text{Ter}} + \Omega.$$

Cela revient à dire que pendant le temps τ Vénus fait cinq tours complets par rapport à son propre système de coordonnées orbital (par rapport à l'axe Soleil-Vénus) et quatre tours complets par rapport à l'axe Soleil-Terre. Les deux dernières relations de résonance se réduisent à une seule,

$$\Omega = 4\omega_{\text{vén}} - 5\omega_{\text{Ter}},$$

car $2\pi/\tau = \omega_{\text{vén}} - \omega_{\text{Ter}}$. Les données sur les résonances dans le mouvement des planètes sont résumées dans le tableau 4.3

Tout cela témoigne en faveur du rôle particulier, et nullement aléatoire, des résonances dans le mouvement des mondes.

On dit que toute bonne idée, avant de devenir notoire, franchit trois stades :

I. « C'est impossible ».

II. « C'est possible, mais il faut le démontrer ».

III. « On le sait depuis longtemps ».

L'idée de A. Moltchanov serait actuellement à mi-chemin entre le premier et le deuxième stade *). Elle fait couler beaucoup d'encre. Et bien qu'elle attende toujours sa démonstration, son existence même stimule les recherches. La valeur de cette hypothèse pour la connaissance de la nature est indéniable.

L'idée de Moltchanov n'est pas sans répondre aux idées de N. Tchétaïev, qui lui sont antérieures **). Voici une hypothèse extrêmement riche de Tchétaïev : « La stabilité, qui est un phénomène foncièrement général, doit probablement percer d'une façon ou d'une autre dans les lois fondamentales de la Nature » [4.14].

En développant méthodiquement cette idée, Tchétaïev a abouti en particulier à l'hypothèse de la quantification des orbites stables en dynamique. Selon Tchétaïev, seules sont stables des trajectoires

*) Ces paroles ont été écrites en 1972. Il est probable qu'aujourd'hui le stade II est révolu.

**) Nikolaï Tchétaïev (1902-1959), membre correspondant de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., éminent mécanicien et mathématicien soviétique, auteur d'ouvrages et d'idées fondamentaux en théorie de la stabilité et en mécanique analytique.

Tableau 4.3

Résonances dans le mouvement des planètes et de leurs satellites

1. *Lune*	
Période de révolution autour de la Terre, *jours moyens*	$T_0 = 27{,}32$
Période de rotation, *jours moyens*	$T_\omega = 27{,}32$
Sens de rotation	direct *)
Résonance	$\frac{T_\omega}{T_0} - 1 = 0$
2. *Mercure*	
Période de révolution autour du Soleil, *jours moyens*	$T_0 = 87{,}97$
Période de rotation, *jours moyens*	$T_\omega = 59 \pm 3$
Sens de rotation	direct
Résonance	$\frac{3T_\omega}{5T_0} - 1 \approx \pm 0{,}017$
3. *Vénus*	
Période de révolution de Vénus autour du Soleil, *jours moyens*	$T_0^{\text{Vén}} = 224{,}7$
Période de révolution de la Terre autour du Soleil, *jours moyens*	$T_0^{\text{Ter}} = 365{,}24$
Période de révolution synodique, *jours moyens*	$\tau = 583{,}92$
Période de rotation de Vénus, *jours moyens*	$T_\omega^{\text{Vén}} = 243{,}24 \pm 0{,}03$
Sens de rotation	rétrograde
Résonance	$\left(\frac{4}{T_0^{\text{Vén}}} - \frac{5}{T_0^{\text{Ter}}} - \frac{1}{T_\omega^{\text{Vén}}}\right) T_\omega^{\text{Vén}} \approx 0{,}001$

*) Direct, dans le sens de la progression sur l'orbite ; rétrograde, dans le sens opposé.

exceptionnelles, par analogie à la mécanique des quanta où seules sont stables des orbites exceptionnelles des électrons.

En conclusion, décrivons quelques propriétés bien connues du mouvement dans un champ de forces centrales à la lumière du « principe des résonances ».

Un point matériel de masse m qui se meut dans un champ de forces centrales relevant d'une fonction de forces $U(r)$ qui ne dépend que de la distance r du point à l'origine des coordonnées effectue un mouvement plan et complètement défini par les lois de la conser-

vation de l'énergie et du moment cinétique. Introduisons des coordonnées polaires r, φ dans le plan du mouvement. L'intégrale de la demi-force vive et l'intégrale des aires s'écriront alors respectivement

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-U(r)=h, \tag{4.5.2}$$

$$r^2\dot{\varphi}=c. \tag{4.5.3}$$

Eliminant $\dot{\varphi}$ de (4.5.2) au moyen de (4.5.3), on retrouve un mouvement à une dimension:

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2-U^*(r)=h, \quad U^*(r)=U(r)-\frac{mc^2}{2r^2}. \tag{4.5.4}$$

La quantité $U^*(r)$ est appelée *fonction de forces effective*. Introduisons la notation

$$\Phi(r)=\frac{2}{m}(h+U^*).$$

Les expressions (4.5.4) nous donnent alors une équation intégrable

$$\dot{r}=\pm\sqrt{\Phi(r)}. \tag{4.5.5}$$

On a en mouvement réel $\Phi(r)\geqslant 0$; si r_1, r_2 sont deux racines voisines de l'équation $\Phi(r)=0$ et si $\Phi(r)>0$ pour $r_1<r<r_2$, un mouvement réel né dans l'intervalle $r_1\leqslant r\leqslant r_2$ n'en sortira jamais. La valeur de r oscillera périodiquement en règle générale, avec une période T_r, entre ses valeurs extrêmes r_1 et r_2. Il en est généralement ainsi quelle que soit la constante de l'énergie h qui doit être contenue, elle aussi, dans un intervalle bien défini $h'\leqslant\leqslant h\leqslant h''$.

Ensuite, éliminant dt de (4.5.3) à l'aide de (4.5.5), on voit que pendant le temps T_r le rayon vecteur d'un point de l'orbite aura tourné d'un angle $2\Delta\varphi$ où

$$\Delta\varphi=\int_{r_1}^{r_2}\frac{c\,dr}{r^2\sqrt{\Phi(r)}}. \tag{4.5.6}$$

Si $\Delta\varphi=\pi$, la trajectoire est fermée. Elle se sera fermée après le premier tour du rayon vecteur. Elle est aussi fermée dans le cas général si $\Delta\varphi=\frac{k}{n}\pi$, avec k, n entiers.

Or, cela ne tient à rien! Si les constantes de l'énergie h et des aires c sont choisies arbitrairement, la trajectoire du point dans un champ de forces centrales est ouverte en général et représente par exemple une rosace à une infinité de pétales, comme sur la figure 1.12, *a*.

Il est d'autant plus étonnant que dans le champ de forces newtoniennes qui existe réellement dans l'Univers et qui relève de la fonction de forces

$$U = \frac{\mu m}{r}, \tag{4.5.7}$$

les trajectoires — des ellipses képlériennes! — soient fermées pour toute valeur strictement négative de la constante de l'énergie h. Elles se ferment après le premier tour complet du rayon vecteur. Cette propriété n'est pas une conséquence des lois de la conservation; elle découle de la forme particulière de la fonction de forces effective

$$U^* = \frac{\mu m}{r} - \frac{mc^2}{2r^2} \tag{4.5.8}$$

qui correspond à la loi de l'attraction newtonienne. En plus du champ de forces newtoniennes (4.5.7), seul le champ

$$U = -kr^2, \quad k = \text{Cte},$$

possède cette propriété. Le champ en question permet des oscillations harmoniques du point.

De cette façon, le champ de forces centrales de Newton est une merveille de la nature, un phénomène unique. Le fait que la nature puisse inventer à son propre usage un mode d'attraction unique, particulier, susceptible de fermer les orbites, frappe l'imagination.

Or, qu'est-ce qu'une orbite fermée? C'est la commensurabilité entre la période T_r des variations de la longueur du rayon vecteur et la période T_φ de rotation de ce dernier de l'angle 2π! Les orbites képlériennes sont commensurables dans le rapport $T_r/T_\varphi = 1/1$. En d'autres mots, le mouvement képlérien — et donc la loi de la gravitation universelle de Newton — est construit autour d'une résonance!

« Tout système ayant subi une évolution raisonnable est nécessairement en résonance », stipule le principe des résonances. On se demande si la loi de Newton elle-même n'est pas un produit de l'évolution de l'Univers selon le « principe des résonances »? Cette idée hardie est aussi de A. Moltchanov.

CINQUIÈME ESSAI

LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS, LE VOYAGE VERS LA LUNE ET L'ÉVOLUTION DES GALAXIES

Méphisto: ...Lune, je t'envoie mon baiser. (Etale sa cape sombre doublée de rouge, s'assoit dessus et s'envole avec un sifflement par la fenêtre qui s'ouvre bruyamment.)

A. Lounatcharski
Faust et la ville

1. Surfaces de Hill

Le voyage Terre-Lune-Terre, dont nous avons tous été les témoins, a commencé longtemps avant le lancement du premier spoutnik: sur le papier, dans les plans, en chiffres obtenus à l'aide de calculatrices électroniques sophistiquées. En 1957 déjà V. Egorov publiait un grand article [5.1] qui contenait une analyse des trajectoires du vol spatial vers la Lune. Dans notre petit essai nous dirons quelques mots sur les travaux d'Egorov, afin de montrer ce qu'on peut faire avec les moyens les plus simples. Dans son livre [5.2] V. Egorov expose ses résultats dans le détail. Le lecteur peut aussi trouver un exposé très profond quoique schématique des travaux d'Egorov dans le livre de V. Lévantovski *Vers la Lune à bord d'une fusée* [5.3].

Le problème du vol spatial vers la Lune peut être examiné dans le cadre du *problème restreint des trois corps*. Soient m_1 la masse de la Terre et m_2 celle de la Lune; l'attraction de ces deux masses provoque le déplacement d'un vaisseau spatial de masse m_0 si petite devant m_1 et m_2 qu'on peut négliger l'attraction exercée par le vaisseau sur la Lune et la Terre. Dans ces conditions la Lune et la Terre parcourent des trajectoires képlériennes connues autour de leur centre de masse commun. Supposons que ce soient des trajectoires circulaires, auquel cas le problème des trois corps est appelé *circulaire*. Comme unité du temps, nous adopterons la période T de révolution suivant ces trajectoires divisée par 2π, et comme unité de la longueur, la distance a séparant les centres de la Lune et de la Terre ($a = 384\,400$ km). On a alors en ces unités, conformément à la troisième loi de Kepler,

$$f\,(m_1 + m_2) = a^3 \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-2} = 1,$$

où f est la constante universelle de gravitation.

Il s'agit de déterminer la trajectoire suivie par le point m_0. Les équations différentielles de son mouvement se laissent mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\dot{y} + \partial\Phi/\partial x, \\ \ddot{y} &= -2\dot{x} + \partial\Phi/\partial y, \\ \ddot{z} &= \partial\Phi/\partial z, \end{aligned}\right\} \tag{5.1.1}$$

où

$$\Phi = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{fm_1}{r} + \frac{fm_2}{\rho}. \tag{5.1.2}$$

Les équations (5.1.1) sont justement celles du mouvement d'un point non attractif m_0 dans le problème restreint circulaire des trois corps. Les coordonnées x, y, z définissent la position du point dans le système animé de rotation ; l'axe des x traverse constamment les centres de la Terre et de la Lune, l'axe des y se trouve dans le plan de l'orbite lunaire en passant par le centre de masse de la Lune et de la Terre *), et l'axe des z complète le système de façon à en faire un repère direct. On a alors

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2},$$

où x_1, x_2 sont les coordonnées constantes des points m_1, m_2 sur l'axe des x ; r, ρ sont les distances du point non attractif m_0 à la Terre (m_1) et à la Lune (m_2) respectivement.

Les équations (5.1.1), dont le rôle en mécanique céleste et en mécanique du vol spatial est immense, ne se prêtent malheureusement pas à l'intégration. Plus exactement, personne n'a pu les intégrer sous forme finie. En analysant les trajectoires possibles du vol d'un vaisseau spatial dans le système Lune-Terre, on est obligé soit d'avoir recours à des méthodes approchées, soit de faire une intégration numérique des équations du mouvement.

Il est vrai que certaines conclusions découlent déjà de l'analyse des équations (5.1.1). On voit sans peine que ces équations admettent une intégrale première, à savoir l'intégrale de Jacobi

$$\frac{1}{2} V^2 = \Phi + h, \tag{5.1.3}$$

où $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ est la vitesse du mouvement dans le système tournant, h une constante arbitraire, et Φ (x, y, z) la fonction définie

*) C'est précisément la rotation du système des coordonnées qui introduit les termes $2\dot{y}$, $-2\dot{x}$ dans (5.1.1) et le terme $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ dans (5.1.2). Sans ces termes, (5.1.1) et (5.1.2) ne seraient autres que les équations intégrables — déjà connues — du problème des deux centres fixes.

par (5.1.2). Puisque $V^2 \geqslant 0$, on a en mouvement réel

$$\Phi(x, y, z) \geqslant -h. \tag{5.1.4}$$

Les surfaces d'équation

$$\Phi(x, y, z) = -h \tag{5.1.5}$$

délimitant le domaine des mouvements possibles portent le nom de *Hill*, qui était le premier à les étudier. Dans le système Lune-Terre on a $m_1/m_2 = 81{,}30$; les *surfaces de Hill* qui existent dans ce système sont représentées sur la figure 5.1.

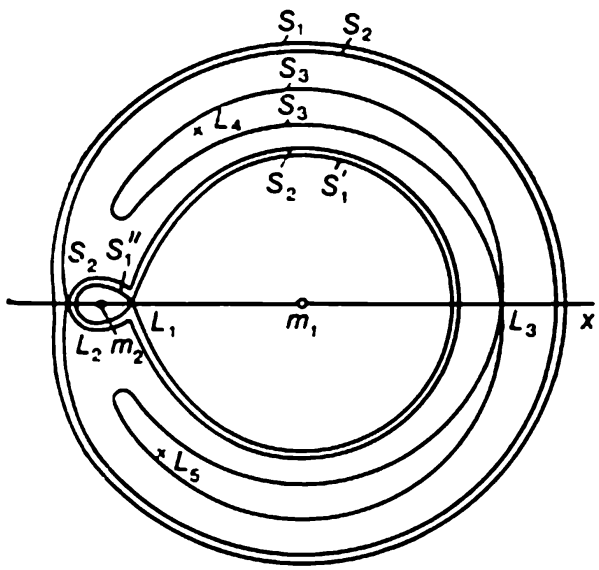


Fig. 5.1. Section des surfac s de Hill par le plan de l'orbite lunaire

On voit sur cette figure les traces des surfaces (5.1.5) sur le plan $z = 0$. Nous y avons montré quelques surfaces qui correspondent à des valeurs différentes de la constante de l'énergie h en mouvement relatif. L'analyse permet de voir que si h prend des valeurs négatives importantes en module, le mouvement n'est possible qu'à l'intérieur de deux surfaces disjointes S', S'' proches des sphères de centres en m_1, m_2, ainsi qu'à l'extérieur d'une surface S qui enferme S' et S''. Chacune des surfaces S', S'' a une section de forme sensiblement circulaire. Ces surfaces ne sont pas représentées sur la figure 5.1, mais on peut les imaginer sans peine en faisant une légère contraction des surfaces S_1', S_1'' et une légère dilatation de la surface S_1. Si donc h prend de telles valeurs, le vaisseau spatial est condamné soit à rester un satellite de la Terre, soit à devenir un satellite de la Lune, soit enfin à évoluer loin du système Lune-Terre sans jamais traverser la frontière S.

Ainsi donc, il est impossible que le vaisseau se déplace d'abord très près de la Terre et arrive ensuite très près de la Lune, à moins que la constante de l'énergie h ne soit augmentée. En effet, il y a une valeur de $h = h_1$ telle que les surfaces S', S'' se rapprochent au point d'entrer en contact en L_1. De telles surfaces seront notées S_1', S_1'' (fig. 5.1). Si l'on augmente encore h de telle façon que la différence $h - h_1$ soit petite, on verra se former un « goulot » étroit autour du point L_1 sur la surface de Hill. A présent le domaine des mouve-

ments possibles du vaisseau couvre les voisinages de la Terre et de la Lune reliés par un goulot étroit. Il existe dès lors des trajectoires « autorisées » qui, partant du voisinage de la Terre, peuvent pénétrer dans le voisinage de la Lune au travers du goulot qui entoure le point L_1. En d'autres termes, le voyage vers la Lune n'est possible que si l'on dispose d'une énergie $h > h_1$. Etant donné que le vol spatial commence toujours très près de la Terre (par exemple, à partir d'une orbite circumterrestre de 200 km d'altitude), la question de l'augmentation de l'énergie h se réduit à l'accroissement de la vitesse initiale V_0.

La position initiale du vaisseau sur l'orbite circumterrestre n'a aucune importance pratique pour la valeur de V_0 nécessaire par exemple à l'obtention de l'énergie $h = h_1$ (soit $V_0^{(1)}$ cette vitesse; les valeurs numériques exactes seront nommées plus tard).

Augmentons encore la vitesse initiale jusqu'à la valeur $V_0^{(2)}$ (ce qui revient à porter l'énergie à une valeur $h_2 > h_1$) telle que les surfaces S et S'' entrent en contact en un point L_2 (la surface unique S_2 représente ce cas sur la figure 5.1). Il est clair qu'en augmentant encore l'énergie, on verra se former un deuxième « goulot » autour du point L_2. Dans ce cas, si l'énergie n'est pas très supérieure à h_2, une nouvelle trajectoire devient possible: le vaisseau part du voisinage de la Terre, traverse le goulot près du point L_1 et arrive au voisinage de la Lune, puis passe par le goulot près du point L_2 et quitte le système Terre-Lune. Combien de révolutions autour de la Terre le vaisseau fera-t-il avant de s'approcher de la Lune? Le vaisseau tournera-t-il aussi autour de la Lune comme satellite provisoire avant de s'envoler hors du système Terre-Lune? Ces deux questions restent sans réponse. Tout ce qu'on peut dire, c'est que, pour $h > h_2$, les trajectoires de ce type ne sont pas interdites, donc sont possibles. Cela ne revient cependant pas à affirmer que de telles trajectoires existent réellement; nous verrons plus tard de quoi il en retourne. En attendant, nous remarquons dans chaque demi-plan (fig. 5.1) un domaine interdit au mouvement pour une énergie $h = h_3$; ce domaine, qui a une forme en goutte, se réduit à un point L_4 (ou L_5) lorsque h passe de h_3 à h_4.

Pour $h > h_3$ le vaisseau peut s'en aller à l'infini dans un voisinage de L_3 sur l'axe des x; pour $h > h_4$ ($h_4 < 0$), le vaisseau peut s'en aller à l'infini suivant une direction quelconque dans le plan x, y.

Nous venons de considérer l'évolution des surfaces de Hill dans le plan x, y. Considérant cette évolution en trois dimensions x, y, z, on voit les surfaces de Hill disparaître pour $h = 0$, faisant disparaître par là même les domaines du mouvement interdit.

Les points L_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) s'appellent *points de libration*. Dans le tableau 5.1 on trouve les valeurs calculées des distances r_i, ρ_i des points de libration à la Terre et à la Lune respectivement, des énergies h_i correspondant à ces points, et des vitesses $V_0^{(i)}$ corres-

Tableau 5.1

Point de libration	r_i	ρ_i	h_i	$V_0^{(i)}$ en $2\pi a/T$	$V_0^{(i)}$ en km/s
L_1	0,8491539	0,1508461	—1,594067	10,60335	10,84890
L_2	1,1677237	0,1677237	—1,585991	10,60411	10,84968
L_3	0,9929263	1,9929263	—1,506062	10,61165	10,85738
L_4	1	1	—1,494001	10,61278	10,85854

pondant à ces énergies. En calculant $V_0^{(i)}$, on a supposé que le point initial se trouve à 200 km au-dessus de la surface de la Terre.

Les distances des points L_1, L_2 à la Lune sont de 58 000 km et de 65 000 km respectivement, ce qui signifie qu'ils sont tous deux contenus à l'intérieur de la sphère d'influence de la Lune, introduite dans l'essai précédent, qui a 66 000 km de rayon. Les points en question ne se trouvent pas loin de la frontière de cette sphère.

Notons qu'il y a très peu de différence ($\sim$ 1 m/s) entre les vitesses $V_0^{(1)}$ et $V_0^{(2)}$, ainsi qu'entre $V_0^{(3)}$ et $V_0^{(4)}$. Cela revient à dire qu'une très faible variation de la vitesse initiale peut provoquer un changement qualitatif de la trajectoire: pour $V_0 \approx V_0^{(1)}$ la trajectoire est nécessairement bornée, alors que pour $V_0 \approx V_0^{(2)}$ elle peut devenir infinie, la force de l'attraction lunaire projetant le vaisseau hors du système Terre-Lune (au travers du goulot L_2).

2. Parenthèse sur les points de libration

Les points de libration L_i sont des points singuliers de la surface $\Phi(x, y, z) = h$. Autrement dit, les coordonnées de ces points sont solutions du système d'équations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0. \tag{5.2.1}$$

Il est important de préciser la signification mécanique des points de libration. En comparant les équations du mouvement (5.1.1) et les conditions (5.2.1), nous voyons que les coordonnées des points de libration définissent les *positions d'équilibre relatif*: si la vitesse initiale du vaisseau (dans le système tournant) est nulle, c'est-à-dire $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$, et si le vaisseau lui-même se trouve en un point de libration, il va y rester indéfiniment.

La question de la stabilité de ces positions d'équilibre a été posée encore par Lagrange. Le vaisseau va-t-il évoluer indéfiniment autour du point de libration si on l'écarte très légèrement de ce point

et/ou si on lui communique une certaine vitesse? On a vite constaté que les points de libration L_1, L_2, L_3 sont *instables*.

Quant aux points L_4 et L_5, dits *points triangulaires de Lagrange* (car ils forment des configurations triangulaires avec les masses attractives m_1, m_2), leurs stabilité mérite une étude spéciale. Il se trouve qu'en linéarisant les équations du mouvement (5.1.1) au voisinage des points de libration triangulaires, leur solution s'avère bornée si et seulement si le rapport des masses des points attractifs $\varkappa = m_1/(m_1 + m_2)$, $m_1 < m_2$, vérifie la condition

$$\varkappa(1-\varkappa) < \frac{1}{27}. \tag{5.2.2}$$

Si la condition (5.2.2) n'est pas vérifiée, l'équilibre est instable. Si la condition (5.2.2) a lieu, le mouvement est stable, à l'erreur de l'approximation linéaire près: nous savons déjà qu'une telle stabilité est précaire.

Pendant presque deux siècles, la question de la stabilité des points triangulaires de Lagrange est restée ouverte. La réponse n'est venue qu'au début des années soixante de ce siècle, après que V. Arnold eut formulé son théorème sur la stabilité de l'équilibre des systèmes de Hamilton à deux degrés de liberté. Ce théorème a permis de faire un pas en avant dans la résolution du problème *plan*. A. Léontovitch, en s'appuyant sur les résultats d'Arnold, a montré [5.4] que le mouvement est stable pour toute valeur du rapport des masses vérifiant (5.2.2), sauf peut-être un ensemble discret de valeurs de ce rapport. Plus tard, les chercheurs américains A. Deprit et A. Deprit-Bartolome [5.5] ont décrit cet ensemble exceptionnel en détail. C'est A. Markéev qui, en 1969, a donné le coup de grâce au problème [5.6].

Les résultats de Markéev permettent de formuler le théorème suivant: *les points triangulaires de Lagrange sont stables pour tous les rapports des masses vérifiant la condition* (5.2.2), *sauf deux rapports*

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \frac{15-\sqrt{213}}{30} = 0{,}0135160\ \ldots, \\ \varkappa &= \frac{45-\sqrt{1833}}{90} = 0{,}0242938\ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{5.2.3}$$

pour lesquels les points triangulaires de Lagrange sont instables.

Ce théorème vient clore l'histoire vieille de deux cents ans sur la stabilité des points de libration dans le problème restreint circulaire plan des trois corps. Ce même problème a aussi été examiné en détail en 3 dimensions.

Notons que la stabilité des points de libration est essentiellement conditionnée par l'existence des termes dits *gyroscopiques* dans les équations du mouvement. La présence de ces termes est due au fait que le mouvement est considéré dans un système de

coordonnées animé de rotation, avec l'axe Terre-Lune. C'est aux points de libration que les forces d'attraction et les forces centrifuges se font équilibre.

On montre en théorie de la stabilité que la stabilité « gyroscopique » est sapée par les forces dissipatives, telles que la résistance de la matière interplanétaire par exemple. Donc, en présence des forces dissipatives, une particule qui se serait fourvoyée dans le voisinage d'un point de libration ne pourrait y séjourner que temporairement ; très longtemps peut-être, mais pas toujours.

Il est d'autant plus intéressant de signaler qu'en 1961 l'astronome polonais K. Kordylewski a découvert des amas de poussière cosmique au voisinage des points de libration triangulaires du système Terre-Lune. Les amas sont peut-être instables, une partie des particules sont progressivement évacuées du voisinage des points de libration sous l'action des forces dissipatives, mais leur place est aussitôt occupée par d'autres particules de poussière venues des profondeurs de l'Univers.

Fermons notre parenthèse et revenons au problème du voyage vers la Lune.

3. Trajectoires d'approche et leur analyse

Si donc on communique à l'engin spatial, au voisinage de la Terre, une vitesse (dans le système tournant) $V_0^{(1)} = 10{,}84890$ km/s (voir tableau 5.1), il y a des chances pour qu'il arrive tôt ou tard tout près de la Lune.

Tôt ou... tard ?

En effet, le voyage vers la Lune doit être raisonnablement rapide. Un voyage qui durerait quelques centenaires n'intéresse personne. Or, le calcul numérique montre qu'un engin ayant reçu une vitesse égale exactement à $V_0^{(1)}$ franchira « seulement » une distance de 260 000 km (rappelons qu'il y a 384 400 km de la Terre à la Lune !) et reviendra ensuite vers la Terre. Il est vrai qu'à la révolution suivante l'engin volera un peu plus loin mais il reviendra aussi à la Terre, et ainsi de suite. Il faut probablement quelques centaines ou milliers de révolutions autour de la Terre pour que l'engin puisse s'approcher du « goulot » entourant le point de libration L_1 et traverser ce goulot en direction de la Lune. Ce serait un voyage trop morne... Il est préférable de s'arranger pour que l'engin puisse aller vers la Lune dès la première révolution. Nous allons considérer les trajectoires qui pénètrent dans la sphère d'influence de la Lune déjà à la première révolution (par rapport à la Terre). V. Egorov les a appelées *trajectoires d'approche*.

Parmi les trajectoires d'approche, un intérêt particulier est attiré par celles qui garantissent la rencontre avec la Lune au cours de la première révolution de l'engin autour de la Terre ; selon V. Ego-

rov, l'engin doit posséder pour cela une vitesse absolue minimale $V_1 = 10{,}90525$ km/s. Elle a été calculée sans tenir compte de l'attraction lunaire, dont l'influence est d'ailleurs négligeable en l'occurrence. La vitesse V_1 est donc considérée comme une grandeur de référence. Il serait intéressant de faire un tableau des vitesses initiales caractéristiques pour les voyages dans le système Terre-Lune (tous les calculs sont faits pour le point de départ à 200 km au-dessus de la surface de la Terre; les vitesses sont calculées pour un système de coordonnées non tournant):

$V_0^{(1)} = 10{,}86570$ km/s. L'engin peut atteindre la Lune en principe, après de nombreuses révolutions autour de la Terre;

$V_0^{(2)} = 10{,}86640$ km/s. L'engin peut quitter le système Lune-Terre (en profitant de l'attraction lunaire accélératrice);

$V_1 = 10{,}90525$ km/s. Vitesse minimale nécessaire pour rencontrer la Lune au cours de la première révolution autour de la Terre;

$V_p = 10{,}99967$ km/s. Vitesse parabolique. L'engin peut quitter le système Lune-Terre (sans profiter de l'attraction lunaire).

Nous avons déjà dit que la trajectoire du vol Terre-Lune est difficile à calculer, car même en tenant compte des seuls facteurs principaux (attraction de la Lune et celle de la Terre), le problème ne peut pas être résolu sous forme analytique.

S'il s'agissait d'analyser le mouvement d'un spoutnik compte tenu de l'attraction lunaire, on pourrait, comme nous l'avons vu dans l'essai précédent, profiter de la petitesse des perturbations lunaires et appliquer les méthodes d'analyse asymptotique.

Dans le cas considéré cela est impossible, vu que l'influence de la Lune n'est pas du tout petite mais, au contraire, devient prépondérante à mesure que l'on s'approche de la Lune.

Or, on peut profiter justement de cette circonstance pour construire un algorithme approché de calcul des trajectoires de voyage vers la Lune. Bornons-nous à considérer les trajectoires d'approche. L'influence de la Lune reste alors petite tant que l'engin n'a pas franchi la frontière de la sphère d'influence lunaire: avant cet instant l'attraction de la Lune est à négliger. Au contraire, une fois que l'engin a pénétré dans la zone d'influence, nous prendrons en considération l'attraction de la Lune mais nous supprimerons au même instant celle de la Terre. Le problème des trois corps s'en trouve réduit à deux corps, et l'on sait que le problème de deux corps est facile à résoudre. Ses solutions donnent des trajectoires képlériennes. Construisons donc l'algorithme de calcul:

1° Calcul képlérien du mouvement géocentrique s'effectuant de la Terre à la sphère d'influence de la Lune.

2° Transformation des paramètres du mouvement géocentrique en paramètres du mouvement sélénocentrique à la frontière de la sphère d'influence.

3° Calcul képlérien de la trajectoire sélénocentrique.

4° Eventuellement, calcul d'une nouvelle trajectoire géocentrique, l'engin étant sorti de la sphère d'influence lunaire.

Cette méthode de calcul des trajectoires des corps célestes remonte à Laplace (sauf qu'il ne s'agissait pas bien sûr des spoutniks...).

Cette méthode simple s'avère très efficace: les paramètres du mouvement calculé diffèrent peu de ceux du mouvement réel. On s'en est assuré en comparant le calcul approché et l'intégration numérique des équations du mouvement. Cette méthode a été employée avec succès pour le calcul des orbites d'engins lunaires dans

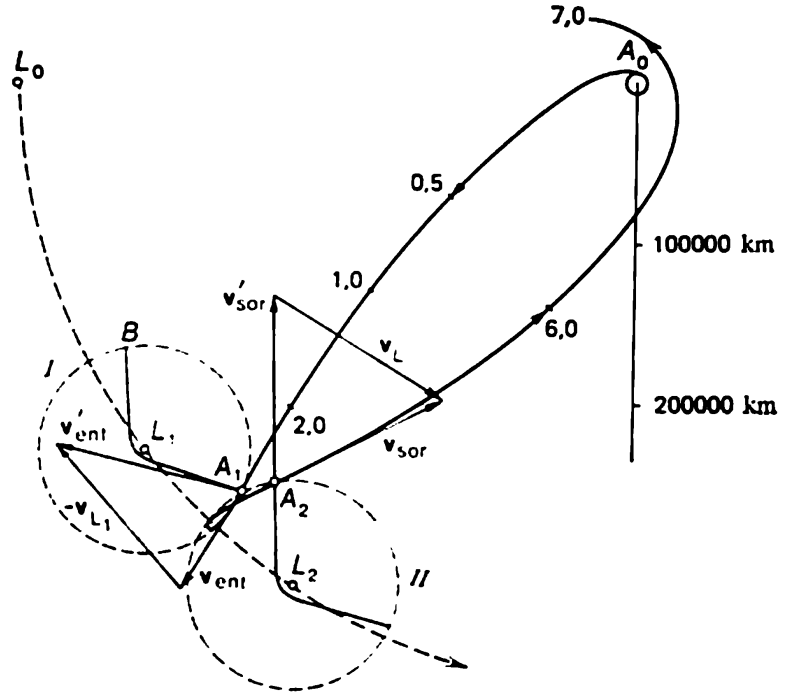


Fig. 5.2. Calcul approché de la trajectoire autour de la Lune selon V. Egorov. (Les chiffres jalonnant la courbe indiquent la durée de vol en jours)

les travaux de V. Egorov [5.1, 5.2], de M. Lidov, D. Okhotsimski, N. Teslenko [5.7] et d'autres chercheurs. Nous allons étudier pas à pas la construction des trajectoires de voyage vers la Lune d'après V. Egorov.

Supposons que l'engin parte d'un point A_0 au voisinage de la Terre (fig. 5.2) et parcoure un arc d'ellipse képlérienne en direction de la Lune, cette dernière se trouvant à l'instant initial au point L_0. (La figure 5.2 représente une trajectoire bien concrète; les chiffres à côté de la courbe marquent la durée de vol en jours.) Au point A_1 l'engin traverse la sphère d'influence de la Lune (circonférence en trait interrompu sur la figure 5.2). Vers cet instant la Lune se sera déplacée sur son orbite de L_0 à L_1. La vitesse géocentrique de l'engin à l'instant de la percée de la sphère d'influence est représentée sur la figure par le vecteur $\mathbf{v}_{ent}$. Aux termes de l'algorithme adopté,

nous devons maintenant faire la conversion du mouvement géocentrique en mouvement sélénocentrique. La vitesse de la Lune sur l'orbite est $\mathbf{v}_{L_1}$. La valeur absolue de cette vitesse est $|\mathbf{v}_{L_1}| = 1{,}02$ km/s. La vitesse de l'engin *par rapport à la Lune*

$$\mathbf{v}'_{ent} = \mathbf{v}_{ent} - \mathbf{v}_{L_1} \tag{5.3.1}$$

se calcule par la formule usuelle : « la vitesse relative est égale à la différence des vitesses absolue et d'entraînement ». Dans le cas considéré la vitesse d'entraînement est celle de la Lune, ce qui nous conduit à la formule vectorielle (5.3.1). Les vecteurs $\mathbf{v}'_{ent}$ et $-\mathbf{v}_{L_1}$ sont représentés, eux aussi, sur la figure 5.2.

Ainsi donc, l'engin a pénétré dans la sphère d'influence lunaire avec la vitesse $\mathbf{v}'_{ent}$.

V. Egorov a découvert un fait remarquable : *pour toute trajectoire d'approche la vitesse d'entrée de l'engin dans la sphère d'influence lunaire* $|\mathbf{v}'_{ent}|$ *calculée par rapport à la Lune est toujours plus grande que la vitesse parabolique sélénocentrique à la frontière de la sphère d'influence.* Cette dernière vitesse $V'_p = 0{,}383$ km/s permet toujours à l'engin de quitter la sphère d'influence de la Lune. Puisque $|\mathbf{v}'_{ent}| > V'_p$, *ou bien l'engin rencontrera la Lune, ou bien il quittera la sphère d'influence lunaire après avoir contourné la Lune en trajectoire hyperbolique.*

On voit sur la figure 5.2 une telle trajectoire hyperbolique qui contourne la Lune à l'intérieur de sa sphère d'influence. L'engin passera suivant cette trajectoire du point A_1 au point B. Or, pendant la durée de trajet suivant $\widehat{A_1B}$, la sphère d'influence lunaire se sera déplacée elle-même, passant de la position I à la position II. Quand l'engin traversera la sphère d'influence, quittant celle-ci en B, la Lune occupera la position L_2 et le point B la position A_2. Finalement la trajectoire hyperbolique *par rapport à la Lune* A_1B est, par rapport à la Terre, une trajectoire bizarre « bouclée » A_1A_2. Après avoir bouclé la boucle, l'engin quittera la sphère d'influence lunaire, animé de la vitesse $\mathbf{v}'_{sor}$ par rapport à la Lune (elle est pratiquement égale en valeur à $\mathbf{v}'_{ent}$ mais sa direction est bien sûr différente). La vitesse géocentrique de sortie $\mathbf{v}_{sor}$ se calcule par la formule : « la vitesse absolue est égale à la somme des vitesses relative et d'entraînement »,

$$\mathbf{v}_{sor} = \mathbf{v}'_{sor} + \mathbf{v}_{L_2}. \tag{5.3.2}$$

Le vecteur $\mathbf{v}_{sor}$ est représenté sur la figure 5.2. Connaissant le module et la direction de ce vecteur, on arrive sans peine à construire la trajectoire képlérienne de retour vers la Terre, ce qui a été fait sur la figure 5.2.

Nous voyons sur cet exemple que la méthode proposée par V. Egorov permet de construire des trajectoires compliquées du problème des trois corps par des procédés très simples. Nous avons déjà dit que la précision de cette méthode est suffisamment bonne pour qu'elle

puisse être utilisée au stade de calcul préliminaire des orbites pour le voyage vers la Lune. Dans [5.1, 5.2] V. Egorov a calculé, analysé et décrit des centaines de trajectoires, établi une classification complète des trajectoires d'approche et examiné une série d'autres problèmes intéressants de dynamique du voyage vers la Lune. V. Lévantovski en parle avec beaucoup de détails dans ses ouvrages de vulgarisation passionnants [5.3, 5.8], qui permettront au lecteur d'aborder sans crainte l'ouvrage de fond de V. Egorov [5.2]. Pour s'initier au problème, le lecteur lira avec intérêt l'article [5.9] de L. Sédov dans lequel l'auteur donne un aperçu très complet de la question des orbites des *Luniks*.

4. Evolution des galaxies

Imaginons maintenant, au lieu d'un point isolé m_0 dont le mouvement est régi par les équations (5.1.1), tout un « essaim » de points de cette nature, contenant quelques centaines ou quelques milliers de particules. Cela revient à envisager simultanément quelques centaines (milliers) de problèmes restreints des trois corps. Un tel ensemble de problèmes est un bon modèle mathématique de l'interaction et de l'évolution des galaxies. Dans ce modèle, un point déterminé, de masse m_1 par exemple, joue le rôle de noyau de la galaxie qui nous intéresse; le nuage de points m_0, dont chacun est attiré par les autres sans exercer d'attraction lui-même, figure la galaxie proprement dite, c'est-à-dire les étoiles, les poussières ou les particules de gaz qui gravitent initialement autour du noyau m_1; enfin, une masse m_2 simule le « corps perturbateur ». Ce dernier peut être représenté par une galaxie voisine ou un corps invisible extrêmement massif. Il est logique de considérer alors le problème *hyperbolique* des trois corps: la masse m_2 parcourt une orbite hyperbolique par rapport à la masse m_1 en perturbant le mouvement initial du nuage des particules satellites de masse m_0. Ce dont il s'agit c'est de suivre l'évolution de la structure du nuage galactique.

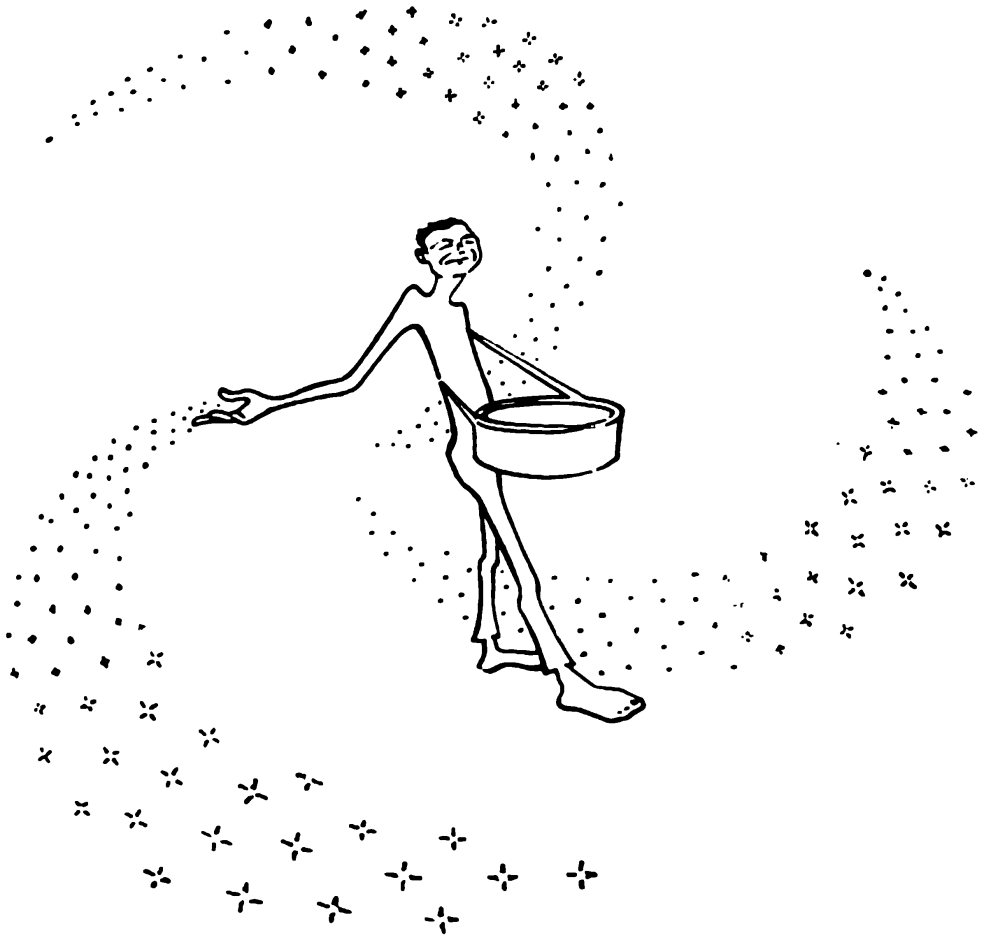
Les particularités étonnantes de la structure observée des galaxies ont depuis toujours intrigué les astronomes. Bon nombre de galaxies sont visiblement spirales; sur les photographies de certains systèmes d'étoiles on distingue de longues « queues »; il y a des couples de galaxies voisines à « queues » opposées. Parfois on voit des « ponts » reliant les galaxies: de telles galaxies sont dites *particulières*, ou *en interaction*. Il existe un *Atlas des galaxies en interaction* établi par B. Vorontsov-Véliaminov *).

*) Le professeur B. Vorontsov-Véliaminov est aussi l'auteur d'un excellent ouvrage de vulgarisation *Univers* (*Essais sur l'Univers*) qui a connu un grand nombre d'éditions. Ce livre est un porte-bonheur: beaucoup de ses lecteurs se sont sentis dès l'âge scolaire une vocation pour les sciences naturelles et l'astronomie. L'auteur du présent livre est du nombre...

Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer la structure particulière des galaxies en interaction par l'intervention de telle ou telle force. Il semble cependant logique d'analyser en premier lieu les effets de la gravitation. En effet, l'interaction gravitationnelle des galaxies rapprochées peut être considérée comme un fait acquis à priori. Les perturbations gravitationnelles affectant une galaxie peuvent provenir aussi des objets matériels inobservables directement par les instruments d'optique ou radio-astronomiques: des quasars morts par implosion gravitationnelle, de vieilles galaxies éteintes dont les étoiles ont épuisé leurs sources d'énergie nucléaire... C'est en observant la structure perturbée des galaxies que l'on se rend compte de l'existence de tels objets.

En 1971 et 1972 N. Kozlov, R. Suniaev et T. Eneiev, chercheurs à l'Institut des mathématiques appliquées de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S., ont entrepris d'étudier l'effet des grosses masses de matière sur l'évolution des galaxies. Ils ont publié leurs résultats dans les travaux [5.10] à [5.13]; dans le texte qui suit, nous reprenons leur article de synthèse [5.10]. Les auteurs ont adopté le modèle mathématique de la galaxie décrit au commencement de ce n° en supposant que les points satellites formaient à l'origine une structure en disque dont la densité décroissait en fonction de la distance au noyau de plus en plus grande. A l'état initial (non perturbé) tous les satellites gravitaient dans le même sens suivant différentes orbites circulaires. Le processus de l'interaction gravitationnelle a été simulé sur ordinateur, visualisé sur écran cathodique et filmé. On a obtenu ainsi un document qui montre la modification de la structure des galaxies sous l'effet des perturbations gravitationnelles.

Il faut dire que l'énorme volume des calculs liés à la simulation de l'évolution des galaxies exigeait l'utilisation d'un ordinateur très puissant; dans le problème envisagé il s'agit d'intégrer simultanément 1000 systèmes d'équations différentielles du sixième ordre pour décrire le mouvement de 1000 points satellites. C'est bien pourquoi un tel travail ne pouvait pas être entrepris dans le passé, bien que les astronomes s'intéressent aux structures des galaxies depuis des dizaines d'années. Regarder l'écran cathodique est passionnant: il permet de voir de ses propres yeux un spectacle qu'un homme ne pouvait jamais espérer voir directement. On observe sur l'écran la variation de la forme de la galaxie dans le temps, tout le processus de l'évolution, répété à volonté pour les conditions les plus variées. Les figures 5.3 et 5.4 montrent quelques images du film qui illustre les études de T. Eneiev et de ses collègues. Malheureusement, elles ne reflètent que très médiocrement le tableau qui s'ouvre sur l'écran au regard émerveillé du chercheur: un tableau vivant, palpitant, de l'évolution de la galaxie qui scintille de ses centaines d'« étoiles » vertes.



Regardons les figures 5.3 et 5.4. Chaque figure contient six images illustrant la variante donnée du passage du corps perturbateur « à côté » de la galaxie. (Dans le film, chaque variante occupe plusieurs milliers d'images.) La première image montre le sens de rotation de la galaxie et la direction du mouvement du corps perturbateur sur son orbite. Chaque image est « datée » : le temps T est mesuré en milliards d'années. L'instant $T = 0{,}00$ correspond à l'approche du noyau de la galaxie au plus près du corps perturbateur.

Sur la figure 5.3 le trajet du corps perturbateur est montré en projection sur le plan de la galaxie non perturbée. Le corps, dont la masse est égale à celle de la galaxie, se meut perpendiculairement au plan de cette dernière avec la vitesse hyperbolique (égale en l'occurrence au double de la vitesse parabolique) à la distance de 40 kpc *) du centre de la galaxie. La masse de la galaxie est égale à 10^{11} fois la masse du Soleil, son rayon est de 36 kpc. La période de révolution d'une particule suivant l'orbite de 36 kpc de rayon atteint 2 milliards d'années. Le passage d'un corps massif fait naître tout d'abord deux bras spiraux bien nets. En outre, l'effet perturbateur du corps étranger s'avère tellement fort que certaines particules se trouvent projetées hors de la sphère d'influence de la galaxie et que d'autres dévient rapidement de leur chemin, se lancent violemment dans les zones centrales de la galaxie, voire entrent en collision avec le noyau. Le plan initial du disque galactique est déformé lui aussi : la structure devient tridimensionnelle (on ne le voit naturellement pas sur la projection à deux dimensions de la figure 5.3).

La figure 5.4 illustre la séquence du film dans laquelle le corps perturbateur passe dans le plan du disque galactique dans le sens direct de sa rotation. La masse du corps perturbateur est quatre fois supérieure à celle de la galaxie. Le corps se meut avec la vitesse parabolique et s'approche de la galaxie à une distance égale au double de son rayon (72 kpc). Dans ces conditions un cinquième à peu près de la matière galactique se trouve piégée et entraînée au-dehors. C'est ainsi qu'un quasar « mort » ou un autre objet massif compact quelconque peut engendrer une nouvelle galaxie en passant à proximité d'une galaxie et en entraînant une partie de sa matière. La matière piégée peut former un nouvel amas d'étoiles et de gaz lié par un « pont » à sa galaxie maternelle.

Les auteurs terminent leur article [5.10] par une conclusion prudente : « La simulation mathématique des processus d'interaction gravitationnelle a révélé des effets qui ressemblent aux structures réelles observées sur les photographies des galaxies. On ne peut pas encore affirmer que ce sont les mécanismes précis responsables de la formation des queues et des ponts entre les galaxies. Un fait semble cependant acquis : l'interaction gravitationnelle influe d'une manié-

*) Un kiloparsec (kpc) = 3529 années-lumière = $30{,}84 \cdot 10^{15}$ km.

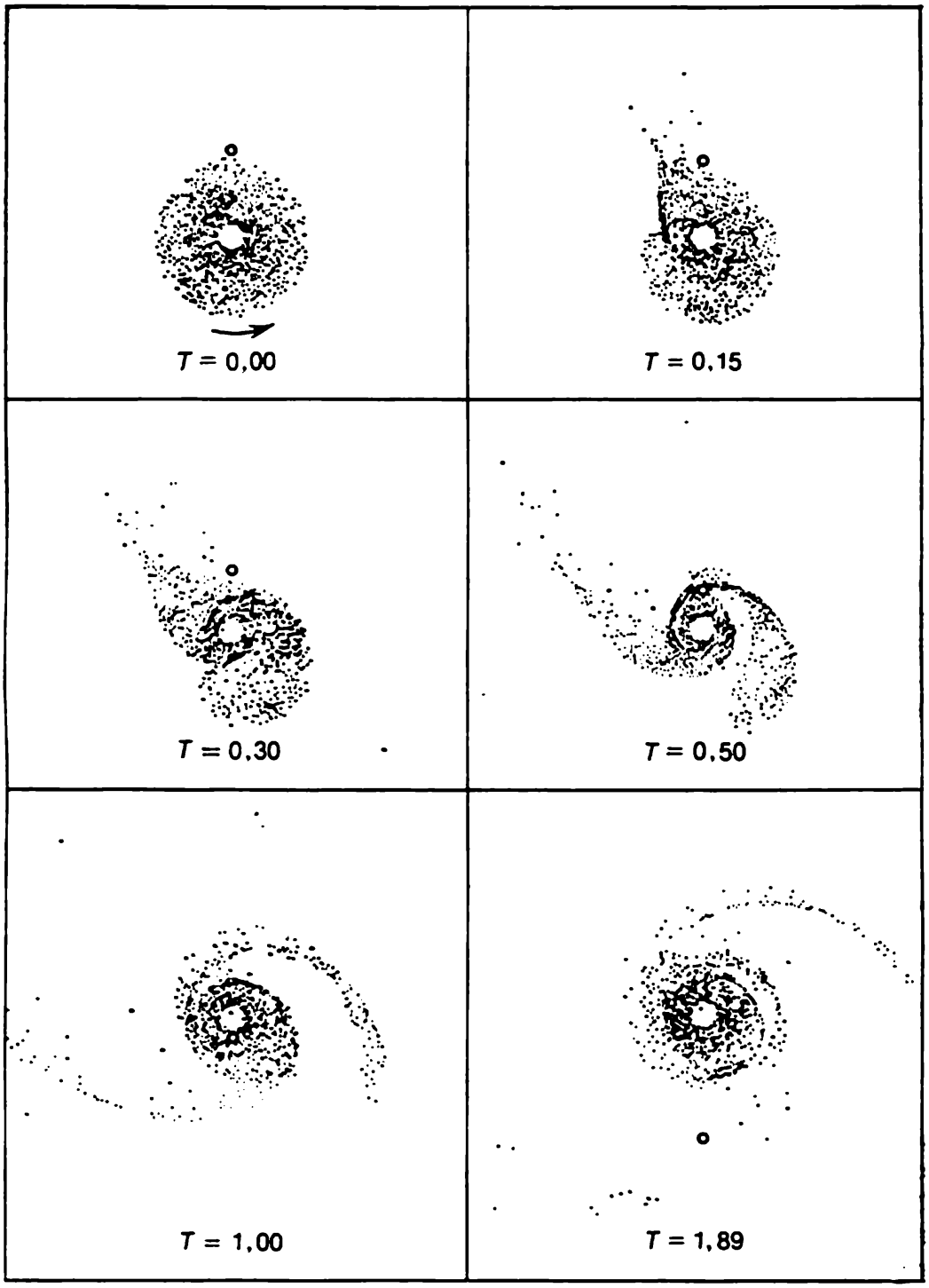


Fig. 5.3. Evolution d'une galaxie définie par le passage à sa proximité d'un corps perturbateur (petit cercle clair) perpendiculairement au plan initial de la galaxie. T est le temps en milliards d'années

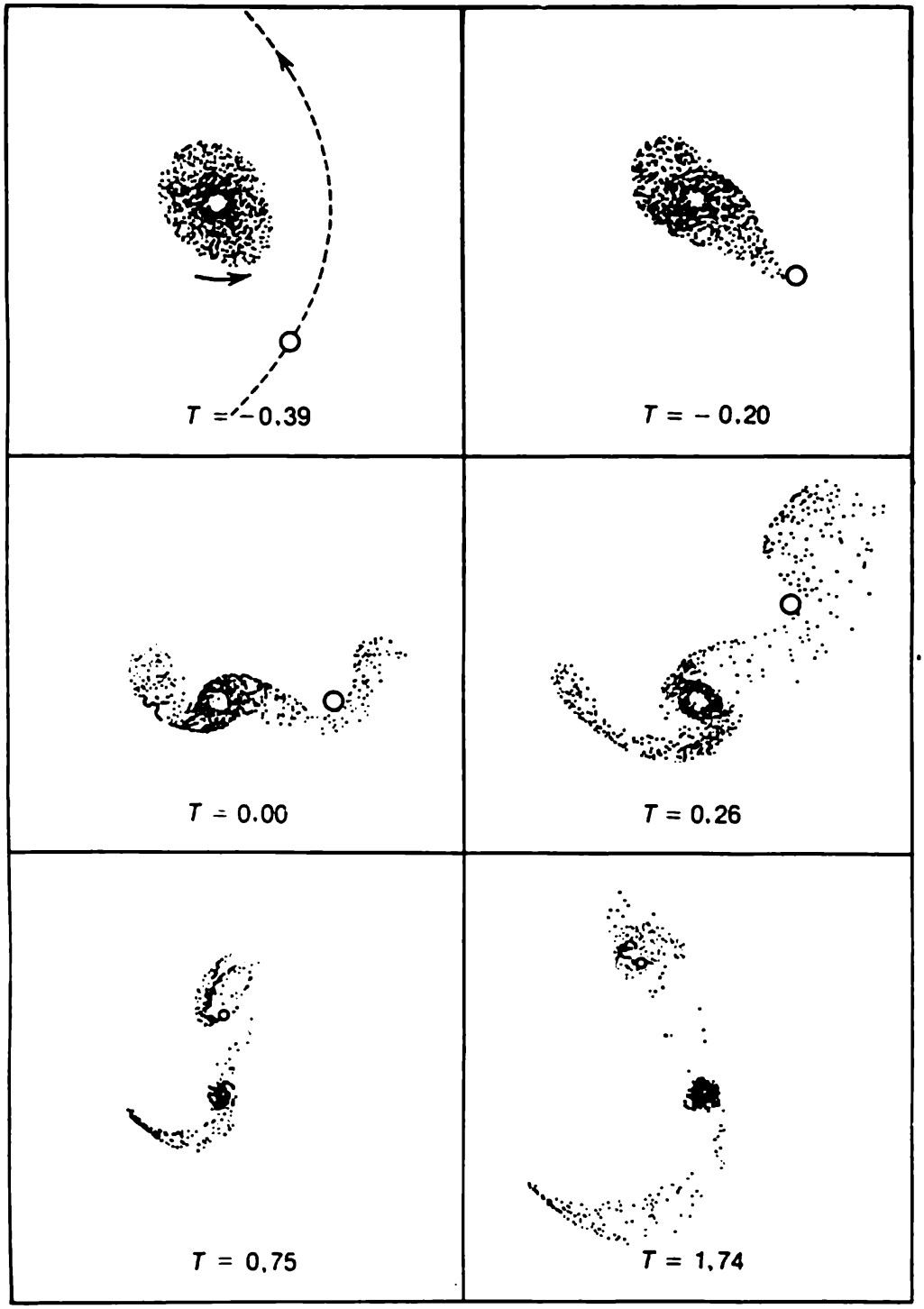


Fig. 5.4. Evolution d'une galaxie sous l'action d'un corps massif passant dans le plan de la galaxie (les deux dernières images sont à l'échelle deux fois plus petite). T est le temps en milliards d'années

re sensible sur la dynamique de l'évolution des systèmes stellaires. Des recherches ultérieures permettront d'apprécier l'échelle réelle de cette influence et son rôle véritable dans l'évolution des galaxies.»

Cependant il est incontestable que la portée des travaux de T. Eneiev et de ses collègues dépasse largement cette constatation modeste. Ecoutons V. Diomine qui commente ces résultats dans la seconde édition (en russe) de son livre *Destin du système solaire* [5.14] :

« Il existe en astronomie une tendance à expliquer tout ce qui est flou à partir des lois et découvertes physiques récentes. Malheureusement, cela se fait à une époque où le développement des systèmes de corps célestes n'a pas encore été étudié avec toute la rigueur nécessaire même dans le cadre des schémas mécaniques !...

T. Eneiev et ses collègues se sont proposé d'expliquer si possible le processus de formation des bras spiraux des galaxies par des processus purement mécaniques. Aucune interaction physique n'a été envisagée, à la différence des autres travaux d'astronomie. Malgré ces restrictions, les résultats de l'équipe d'Eneiev ont dépassé toutes les espérances... Les images obtenues illustrant l'évolution de la galaxie prouvent avec une force de persuasion exceptionnelle que la formation des bras spiraux peut être imputable aux effets des marées.»

SIXIÈME ESSAI

ELLES VALSENT SUR LEURS ORBITES

Ce sont des dames qui dansent...
G. Apollinaire

La Terre glisse doucement sur son orbite en tournant majestueusement sur elle-même. Des planètes, grandes et petites, pivotent autour de leurs axes. Tout lecteur — à moins d'être « paresseux et peu curieux » comme disait Tchékhov — a sûrement vu passer dans le ciel de petites étoiles qui tantôt s'allument brusquement, tantôt s'éteignent comme des feux follets: ce sont des spoutniks qui tournent et montrent à l'observateur leurs faces différentes, exposant au Soleil tantôt leur grande surface latérale polie, tantôt le fond qui réfléchit peu de lumière.

Les danses des astres sont compliquées et variées. Certains astres se contentent d'onduler avec dignité, d'autres tournent lentement autour de plusieurs axes à la fois, mais il y en a aussi qui tourbillonnent à une vitesse vertigineuse, tel un chiot qui s'efforce d'attraper sa queue.

Les lois de rotation des satellites artificiels sont étudiées dans un chapitre particulier de la mécanique du vol spatial: la dynamique du mouvement d'un satellite par rapport à son propre centre de masse [6.1].

Dans le présent essai nous décrirons certains effets remarquables de rotation et d'orientation des satellites.

1. Potentiel gravitationnel

Dans les problèmes que nous allons envisager, le mouvement du satellite autour de son centre de masse est défini essentiellement par des moments des forces de gravité. A leur tour, ces moments se calculent sans peine au moyen de la fonction de forces (prise avec le signe opposé, elle s'appelle *potentiel gravitationnel*) qui décrit l'action du champ newtonien central sur le satellite. Nous savons qu'en assimilant le satellite à un point matériel de masse dm, la fonction de forces dU s'écrit

$$dU = \frac{\mu dm}{r}, \tag{6.1.1}$$

où $\mu = fM$ (f est la constante universelle de gravitation et M la masse de la Terre) et r est la distance du « satellite » (point de masse dm) au centre de la Terre.

Or, dans un problème du mouvement du satellite par rapport à son propre centre de masse, l'essentiel est justement la taille appréciable du satellite, qui ne peut donc plus être traité comme un point matériel. En ce cas la formule (6.1.1) reste vraie pour tout

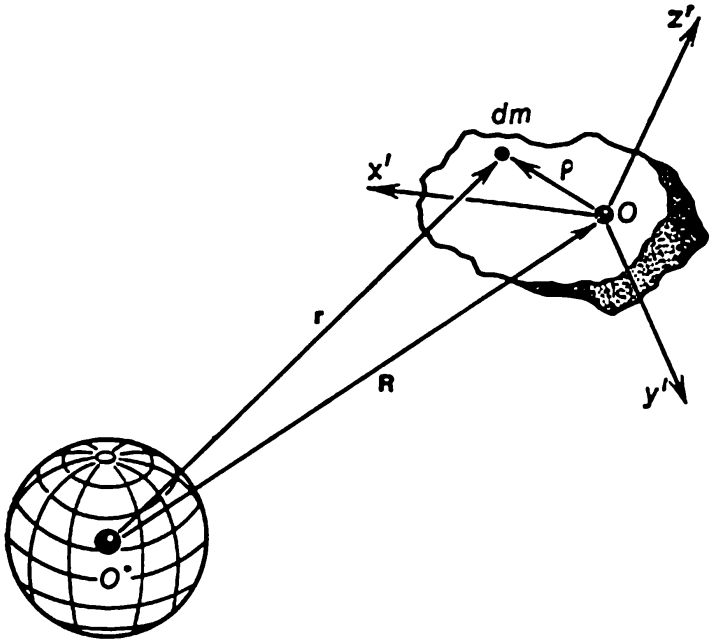


Fig. 6.1. Pour le calcul du potentiel gravitationnel

volume élémentaire dm du satellite. Etendue au volume total V du satellite, elle s'écrira comme suit :

$$U = \mu \int_V \frac{dm}{r} \tag{6.1.2}$$

Soit R (fig. 6.1) la distance du centre d'attraction O^* au centre de masse O du satellite. Associons invariablement au satellite un système de coordonnées $Ox'y'z'$. La distance ρ de O au point courant dm se calcule alors par la formule $\rho^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et l'angle entre les vecteurs $\mathbf{R}$, $\boldsymbol{\rho}$ se définit par son cosinus :

$$\cos(\widehat{\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}}) = \frac{x'}{\rho}\gamma + \frac{y'}{\rho}\gamma' + \frac{z'}{\rho}\gamma''.$$

Ici γ, γ', γ'' sont les cosinus directeurs de $\mathbf{R}$ dans le système de coordonnées $Ox'y'z'$, si bien que $\gamma = \cos(\widehat{\mathbf{R}, Ox'})$, $\gamma' = \cos(\widehat{\mathbf{R}, Oy'})$, $\gamma'' = \cos(\widehat{\mathbf{R}, Oz'})$. Avec ces notations on a dans la formule (6.1.2)

$$r = \sqrt{R^2 + 2R(x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'') + x'^2 + y'^2 + z'^2}. \tag{6.1.3}$$

L'intégration dans (6.1.2) se fait par rapport aux coordonnées courantes x', y', z' et fournit une fonction explicite:

$$U = U(R, \gamma, \gamma', \gamma''). \tag{6.1.4}$$

La fonction de forces (6.1.2) dépend donc à la fois de la distance du satellite au corps attractif et de l'orientation du satellite par rapport à l'axe centre d'attraction-centre de masse du satellite.

On montre [6.1] que les projections des moments des forces de gravité se laissent mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox'} &= \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma'} - \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma''}, \\ M_{Oy'} &= \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma''} - \gamma'' \frac{\partial U}{\partial \gamma}, \\ M_{Oz'} &= \gamma' \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial U}{\partial \gamma'}. \end{aligned}\right\} \tag{6.1.5}$$

La forme d'écriture exacte de U et des moments (6.1.5) dépend en général de la géométrie du corps et de la distribution des masses dans son volume. Cela complique l'analyse. Cependant le problème est simplifié par les petites dimensions des satellites par rapport à la distance R: les quantités x'/R, y'/R, z'/R étant faibles, on peut développer (6.1.3) en série suivant les puissances de ces quantités. Si l'on supprime dans ce développement tous les termes d'ordre de petitesse supérieur à 2, l'intégrale (6.1.2) se calcule sans difficulté. On doit prendre en considération que les intégrales $\int\limits_V z'dm = \int\limits_V y'dm = \int\limits_V x'dm = 0$ (puisque l'origine O du système de coordonnées $Ox'y'z'$ est le centre de masse du satellite) et que les axes Ox', Oy' et Oz' du satellite peuvent être choisis de façon à avoir

$$\int\limits_V x'y'\,dm = \int\limits_V x'z'\,dm = \int\limits_V y'z'\,dm = 0.$$

Les axes Ox', Oy', Oz' ainsi choisis s'appellent *axes d'inertie centraux principaux du satellite*. En faisant les simplifications décrites ci-dessus, on déduit de (6.1.2) l'expression suivante de U:

$$U \approx \frac{\mu m}{R} + \frac{\mu}{2R^3}(A+B+C) - \frac{3}{2}\frac{\mu}{R^3}(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2). \tag{6.1.6}$$

Ici m est la masse du satellite et les constantes

$$A = \int_V (y'^2 + z'^2)\, dm,$$

$$B = \int_V (z'^2 + x'^2)\, dm,$$

$$C = \int_V (x'^2 + y'^2)\, dm$$

sont les *moments d'inertie centraux principaux du satellite*. Les formules (6.1.5) deviennent alors

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox'} &= 3\,\frac{\mu}{R^3}\,(C - B)\,\gamma''\gamma', \\ M_{Oy'} &= 3\,\frac{\mu}{R^3}\,(A - C)\,\gamma\gamma'', \\ M_{Oz'} &= 3\,\frac{\mu}{R^3}\,(B - A)\,\gamma'\gamma. \end{aligned}\right\} \qquad (6.1.7)$$

2. Sur la rotation de la Lune. Quelques rappels de la théorie de la stabilité

L'invariabilité de l'aspect de la « face » lunaire est connue depuis très longtemps. La Lune présente toujours à la Terre la même face ; l'autre — la face cachée — resta cachée aux regards des hommes jusqu'au mois d'octobre 1959 où le *Lunik* soviétique la photographia pour la première fois.

Une telle position invariable de la Lune par rapport à la Terre signifie que la rotation propre de la Lune est en synchronisme exact avec sa révolution autour de la Terre. Supposons pour simplifier que l'orbite lunaire soit circulaire.

Introduisons un système de coordonnées orbitales $O\tau\mathbf{n}\mathbf{r}$ (fig. 6.2) : plaçons l'origine O au centre de masse de la Lune, dirigeons l'axe $O\mathbf{r}$ suivant le rayon vecteur géocentrique $\mathbf{R}$ de la Lune, l'axe $O\tau$ suivant la tangente à l'orbite lunaire et l'axe $O\mathbf{n}$ suivant la normale au plan de l'orbite lunaire. De la sorte, le système de coordonnées orbitales tourne dans l'espace : les axes $O\tau$ et $O\mathbf{r}$, contenus en permanence dans le plan de l'orbite lunaire, pivotent autour de l'axe $O\mathbf{n}$ avec la vitesse angulaire de révolution ω. (La vitesse linéaire du mouvement du centre de masse de la Lune sur son orbite est $V = \omega R$.)

La vitesse angulaire de la rotation propre de la Lune est égale, elle aussi, à ω et dirigée suivant $\mathbf{n}$; la rotation propre est de même sens que la révolution. De ce fait, la Lune tourne toujours la même face à la Terre et, de toute évidence, *reste fixe par rapport au système*

de coordonnées orbitales. On l'exprime aussi en disant que la Lune est *en équilibre relatif* (à de petits balancements, ou *librations*, près).

Remarquons que la rotation de la Lune est régie en première approximation par les lois de Cassini selon lesquelles l'axe de rotation de la Lune se trouve en équilibre relatif dans un système de coordonnées qui tourne avec la ligne des nœuds de l'orbite lunaire ; normale à la ligne des nœuds, l'axe de rotation de la Lune fait un angle de

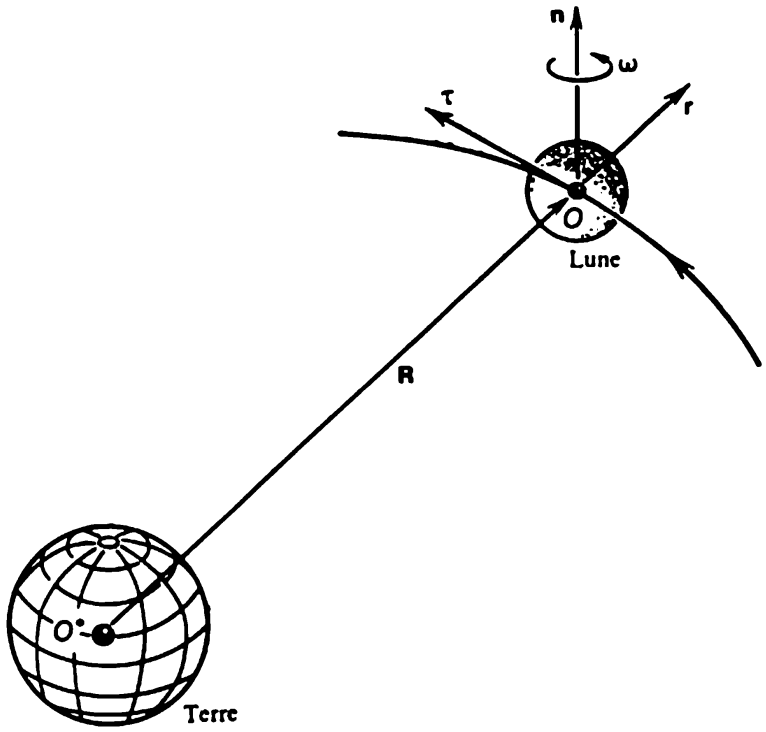


Fig. 6.2. Système de coordonnées orbitales

6°41′ avec la normale au plan de l'orbite. Nous ne tenons pas compte du mouvement de la ligne des nœuds de l'orbite lunaire, ce qui nous permet de remplacer le mouvement régi par les lois de Cassini par un mouvement plus simple, à savoir un équilibre relatif dans le système de coordonnées orbitales. (Pour en savoir plus sur les lois de Cassini, voir notre ouvrage [6.14] et p. 192 ci-dessous.)

Le synchronisme de la rotation et de la révolution n'est pas un fait du hasard, d'autant plus que le phénomène n'est visiblement pas unique dans le système solaire. Selon les données d'observations, les satellites jupitériens Io, Europe, Callisto et les satellites saturniens Téthys, Rhéa, Dioné, Japet tournent, eux aussi, toujours la même face à la planète centrale [6.2] (voir aussi *Astroph. J.*, v. 165, p. 431, 1971). Même les satellites de Mars, Phobos et Deimos, paraîtraient graviter de cette façon, c'est-à-dire en état d'équilibre relatif [6.3].

Pour que le phénomène en question soit non aléatoire, il doit y avoir un facteur stabilisateur qui retienne les satellites (par exemple la Lune) en position d'équilibre relatif. Ce facteur doit influencer aussi les satellites artificiels de la Terre.

En effet, le facteur stabilisateur existe: il est représenté par les moments gravitationnels définis par le potentiel gravitationnel (6.1.6). Montrons-le.

Avant de passer à l'analyse, rappelons quelques définitions et citons sans démonstration quelques théorèmes de la théorie de la stabilité de Liapounov. (Le lecteur peut trouver toutes les démonstrations par exemple dans le livre de N. Tchétaïev [6.56].) Au lieu de discuter la stabilité d'un mouvement arbitraire $q(t)$, on peut, quitte à faire un changement de variables, étudier la stabilité d'une solution $x_i = 0$ d'un système d'équations différentielles

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_i, t), \quad X_s(0, t) \equiv 0 \quad (i, s = 1, \ldots, n). \qquad (6.2.1)$$

Les équations (6.2.1) seront dites *équations du mouvement perturbé*, et leur solution particulière $x_i = 0$, *mouvement non perturbé*. On demande généralement que les seconds membres de (6.2.1) soient analytiques.

Définition 1 **(A. Liapounov).** Si pour tout $A > 0$ arbitrairement petit il existe un $\lambda > 0$ tel que pour toute perturbation $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ vérifiant la condition $\sum_s x_{s0}^2 \leqslant \lambda$ et pour tout $t \geqslant t_0$ il y ait $\sum x_s^2 < A$, le mouvement non perturbé est *stable*; sinon, le mouvement est *instable*.

Notons que la stabilité au sens d'Arnold dont nous avons parlé plus haut est une notion moins forte que la stabilité au sens de Liapounov. Les causes en sont les suivantes:

1° V. Arnold veut que les *trajectoires* perturbée et non perturbée soient proches sans insister que les *points* mobiles sur ces trajectoires soient proches à tout instant. Un mouvement quasi périodique quelconque stable au sens d'Arnold n'est pas stable en général au sens de Liapounov;

2° au sens de V. Arnold, la stabilité ne s'entend pas pour la totalité mais pour la plupart des données initiales; au sens de Liapounov, le mouvement cesse d'être stable s'il existe *au moins une* trajectoire qui ne vérifie pas la définition de la stabilité.

Partout dans ce n°, la stabilité s'entend au sens de Liapounov.

Avant Liapounov on étudiait le plus souvent la stabilité du mouvement en linéarisant les équations (6.2.1) et en discutant les solutions des équations linéaires obtenues. Après les travaux de Liapounov on s'est rendu compte que les équations linéaires ne donnent en général que les conditions *nécessaires* de la stabilité (« si le mouvement est stable, ces conditions sont vérifiées »). Quant à la question:

« Si ces conditions sont vérifiées, le mouvement est-il stable ? », on ne peut pas toujours répondre par un « oui ». La recherche des conditions suffisantes de la stabilité est un problème vraiment ardu.

Définition 2. Soit définie dans un domaine $t > t_0$, $\sum_s x_s^2 \leqslant H$, $H \neq 0$, une fonction $V(x_s, t)$ qui ne prenne que des valeurs de même signe ou des valeurs nulles. On dit alors que V est une *fonction semi-définie* (positive ou négative).

Définition 3. Si la fonction semi-définie V ne dépend pas de t et si l'on peut donner à la constante H (voir définition 2) une valeur suffisamment petite pour que V ne s'annule qu'à l'origine des coordonnées (pour toute $x_s = 0$), on dit que V est une *fonction de signe défini*, ou *fonction définie* (positive ou négative, suivant le cas).

Exemples. La fonction V de deux variables x_1, x_2, $V = x_1^2 + x_2^2$ est définie positive, tandis que les fonctions $V = (x_1 + x_2)^2$ et $V = x_1^2$ ne sont que semi-définies (positives), car elles ne s'annulent pas seulement à l'origine mais aussi sur les ensembles $x_1 = -x_2$ (la première) et $x_1 = 0$ (la seconde). La fonction $V = x_1^2 - x_2^2$ n'est même pas semi-définie.

Définition 4. Une fonction V de t est appelée *fonction de signe défini* ou *fonction définie*, s'il existe une fonction définie positive W indépendante de t et telle que l'une des expressions $V - W$ ou $-V - W$ soit une fonction positive.

Théorème 1 **(A. Liapounov).** *Si les équations différentielles* (6.2.1) *du mouvement perturbé admettent une fonction définie V telle que sa dérivée $V' = \sum_s \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s + \frac{\partial V}{\partial t}$ en vertu de ces équations soit une fonction semi-définie de signe opposé à celui de V ou identiquement nulle, le mouvement non perturbé est stable.*

Sa démonstration (voir [6.56]) utilise le fait que, dans les conditions du théorème, la trajectoire demeure à l'intérieur d'une surface $W(x_s) \leqslant l$ fermée contenant l'origine des coordonnées.

Le théorème de Liapounov fournit les conditions suffisantes de la stabilité. La fonction V est dite *fonction de Liapounov*. On dispose de toute une panoplie de procédés pour construire la fonction de Liapounov dans telle ou telle classe de problèmes. On ne connaît malheureusement pas encore un algorithme général de construction des fonctions de Liapounov pour n'importe quel problème.

Nous aurons besoin du théorème de Liapounov plus tard, dans le n° 3 de cet essai. En attendant, notons que le théorème en ques-

tion permet dans certains cas de trancher le problème de la stabilité dès la première approximation.

Introduisons d'abord quelques définitions.

On dit que la fonction $x(t)$ est *bornée* si pour tout $t \geqslant t_0$ son module $|x(t)|$ reste inférieur à une constante C. On dit que la fonction est *non bornée* si elle peut être supérieure en module à toute constante quelque grande qu'elle soit. On dit que la fonction bornée est *évanescente* (ou *évanouissante*) si $x(t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

Lemme 1. *Si $z = x(t)e^{\lambda t}$ est une fonction évanescente pour $\lambda = \lambda_1$ et non bornée pour $\lambda = \lambda_2$, où λ_1, λ_2 sont deux constantes réelles, il existe toujours une λ_0 réelle telle que pour $\lambda = \lambda_0 + \varepsilon$ la fonction z soit non bornée pour tout ε constant strictement positif et évanescente pour tout ε constant strictement négatif.*

Définition 5. La quantité λ_0 s'appelle *nombre caractéristique* de la fonction $x(t)$.

Substituons maintenant au système (6.2.1) un système linéarisé dans un voisinage de l'origine des coordonnées:

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \quad (s = 1, \ldots, n). \tag{6.2.2}$$

Ici p_{sr} sont des fonctions réelles continues et bornées de t.

Soit $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ une solution de (6.2.2). Le *nombre caractéristique* de cette solution est le plus petit des nombres caractéristiques des fonctions $x_1, \ldots, x_n$. On sait que le système (6.2.2) admet toujours n solutions indépendantes; elles seront caractérisées par une famille de n nombres caractéristiques $\varkappa_s$ (on montre que chaque $\varkappa_s$ est fini). Notons leur somme

$$S = \sum_{s=1}^{n} \varkappa_s.$$

Soit de plus μ le nombre caractéristique de la fonction

$$\exp\left\{-\int \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right\}.$$

Lemme 2. $S + \mu \leqslant 0$.

Définition 6. On dit que le système (6.2.2) est *régulier* si $S + \mu = 0$ et *irrégulier* dans le cas contraire.

Les nombres caractéristiques donnent une idée de la variation qualitative des solutions du système (6.2.2) et permettent de se prononcer sur la stabilité du mouvement non perturbé en première approximation (linéaire). Cela est important, car nous ne savons pas intégrer le système (6.2.2) dans le cas général où les coefficients

$p_{sr}(t)$ sont variables. A. Liapounov a montré cependant que les nombres caractéristiques des équations de la première approximation permettent de dire dans bien des cas si le mouvement non perturbé est stable ou instable en vertu aussi du *système complet* (6.2.1) des équations différentielles du mouvement perturbé. Plus exactement, on a les deux théorèmes que voici :

***Théorème 2* (A.Liapounov).** *Si le système d'équations différentielles de la première approximation* (6.2.2) *est régulier et si tous ses nombres caractéristiques sont strictement positifs, le mouvement non perturbé est stable.*

Théorème 3. *Si le système d'équations différentielles de la première approximation* (6.2.2) *est régulier mais admet au moins un nombre caractéristique strictement négatif, le mouvement non perturbé est instable.*

3. Stabilité de l'équilibre relatif dans le champ gravitationnel

Apparu au milieu des années cinquante de notre siècle agité, le problème de la stabilité de l'équilibre relatif d'un satellite artificiel dans le champ gravitationnel a cependant ses origines dans la nuit des temps. En mécanique céleste, les premières études de la stabilité de l'équilibre relatif de la Lune et de ses oscillations (librations) remontent à Lagrange (1780). Ces études classiques étaient fondées sur la linéarisation des équations des petites oscillations. Après les travaux de A. Liapounov publiés en 1892, les mécaniciens comprennent que l'analyse des équations linéaires ne résout en général pas la question de la stabilité. En 1959 l'auteur du présent livre publie les résultats d'une étude effectuée encore en 1956-1957, consacrée à l'existence et à la stabilité de l'équilibre relatif d'un corps solide dans un champ gravitationnel, rigoureuse au sens de Liapounov et au sens de la position mécanique du problème. Un des résultats fondamentaux de cette étude sera exposé d'une façon simplifiée dans le texte qui suit. Le lecteur trouvera tous les détails dans [6.1, 6.4].

Si le satellite de la Terre (la Lune ou le spoutnik) parcourt une orbite circulaire, il sera exposé, dans le système de coordonnées orbitales, aux forces gravitationnelles, aux forces centrifuges et aux forces de Coriolis. Les moments des forces de Coriolis ne produisent aucun travail. Les moments des forces gravitationnelles sont définis par le potentiel (6.1.6). Pour le potentiel des forces centrifuges, l'expression est analogue :

$$U_\beta = \frac{1}{2}\omega^2 \{A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2\}. \qquad (6.3.1)$$

Ici β, β', β'' sont les cosinus directeurs de la normale **n** au plan de l'orbite par rapport aux axes Ox', Oy', Oz', de telle sorte que

$$\beta = \cos(\widehat{\mathbf{n}, Ox'}), \quad \beta' = \cos(\widehat{\mathbf{n}, Oy'}), \quad \beta'' = \cos(\widehat{\mathbf{n}, Oz'}).$$

Signalons la déduction pour un lecteur méticuleux. La composante du moment élémentaire des forces centrifuges, par exemple, suivant l'axe Ox' sera

$$\begin{aligned} dM_{Ox'} &= y' f_{Oz'} - z' f_{Oy'} = \\ &= \{y' [(x'\alpha + y'\alpha' + z'\alpha'')\alpha'' + (x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'')\gamma''] - \\ &\quad - z' [(x'\alpha + y'\alpha' + z'\alpha'')\alpha' + (x'\gamma + y'\gamma' + z'\gamma'')\alpha'']\} \omega^2 dm. \end{aligned}$$

Ici $f_{Oy'}$, $f_{Oz'}$ sont les composantes de la force centrifuge élémentaire suivant les axes Oy', Oz' du satellite, et α, α', α'' les cosinus directeurs du vecteur unité τ par rapport aux axes Ox', Oy', Oz'. En faisant l'intégration suivant tout le volume et en prenant en considération que $\beta'\beta'' = -(\alpha'\alpha'' + \gamma'\gamma'')$, on obtient $M_{Ox'} = -\omega^2 (C - B)\beta'\beta''$. La comparaison avec les formules analogues (6.1.7) pour le moment gravitationnel défini par la fonction de forces (6.1.6) nous conduit à la fonction de forces (6.3.1) caractérisant les forces centrifuges.

Puisque l'énergie potentielle totale ne dépend pas explicitement du temps (en orbite circulaire), c'est la loi de la conservation de l'énergie mécanique qui entre en jeu:

$$T - U - U_\beta = H, \tag{6.3.2}$$

où T est l'énergie cinétique du satellite dans sa rotation relative, H, l'énergie totale constante du mouvement de rotation du satellite. Puisque dans (6.1.6) on a $R = \text{Cte}$ et que, de plus, $\mu/R^3 = \omega^2$, on peut écrire la loi de la conservation de l'énergie (6.3.2) sous forme explicite [6.4]:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega^2 (A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2) - \\ &\qquad - \frac{1}{2}\omega^2 (A\beta^2 + B\beta'^2 + C\beta''^2) = h. \end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Ici $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ sont les composantes de la vitesse angulaire relative de rotation du satellite suivant ses axes centraux principaux Ox', Oy', Oz'.

En équilibre relatif la vitesse angulaire relative est nulle; quant aux cosinus directeurs, on voit qu'ils ne prennent que des valeurs nulles ou égales à 1 en module. Par exemple, au mouvement

$$\bar{p} = \bar{q} = \bar{r} = 0, \quad \gamma = \gamma' = \beta = \beta'' = 0, \quad \gamma'' = \beta' = 1 \tag{6.3.4}$$

correspond un équilibre relatif dans lequel l'axe Oz' du satellite se confond avec la direction du rayon vecteur ($\gamma'' = \cos(\widehat{Oz', \mathbf{R}}) = 1$) et l'axe Oy' avec la direction de la normale au plan de l'orbite ($\beta' = \cos(\widehat{Oy', \mathbf{n}}) = 1$). L'axe Ox' se confond alors avec la tangente à l'orbite.

Nous dirons que (6.3.4) est le *mouvement non perturbé* et que toute déformation de (6.3.4) est une *perturbation*. Quelle que soit la perturbation, l'énergie totale (6.3.3) du mouvement relatif reste inchangée ; l'expression (6.3.3) est une intégrale première des équations du mouvement (nous ne les avons pas écrites ici ; on trouve les équations complètes du mouvement dans [6.1]).

Compte tenu des relations connues entre cosinus directeurs

$$\gamma''^2 = 1 - \gamma^2 - \gamma'^2, \quad \beta'^2 = 1 - \beta^2 - \beta''^2, \tag{6.3.5}$$

on peut mettre l'expression (6.3.3) sous la forme

$$\frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega^2\{(A-C)\gamma^2 + (B-C)\gamma'^2\} + \\ + \frac{1}{2}\omega^2\{(B-A)\beta^2 + (B-C)\beta''^2\} = h_0. \tag{6.3.6}$$

Ici h_0 est une constante nouvelle, définie par les données initiales $\bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{r}_0, \gamma_0, \gamma'_0, \beta_0, \beta''_0$. Le premier membre de (6.3.6) est une forme quadratique de ses variables. Demandons que cette forme quadratique soit définie positive. Tous ses coefficients seront strictement positifs si

$$B > A > C. \tag{6.3.7}$$

On voit tout de suite que l'équilibre relatif (6.3.4) est stable dans ces conditions. En effet, toute somme de nombres positifs étant nécessairement plus grande que n'importe quelle partie des termes de cette somme, on peut déduire de (6.3.6), sous la condition (6.3.7), par exemple les doubles inégalités suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\gamma^2 \leqslant \frac{2h_0}{3\omega^2(A-C)} < \Delta^2, \quad \gamma'^2 \leqslant \frac{2h_0}{3\omega^2(B-C)} < \Delta^2, \\ &\beta^2 \leqslant \frac{2h_0}{\omega^2(B-A)} < \Delta^2, \quad \beta''^2 \leqslant \frac{2h_0}{\omega^2(B-C)} < \Delta^2, \end{aligned}\right\} \tag{6.3.8}$$

où $\Delta^2 < 1$ est un nombre arbitraire donné à l'avance. De (6.3.8) il ressort qu'on peut toujours choisir des données initiales (h_0) de telle façon que les quantités $|\gamma|$, $|\gamma'|$, $|\beta|$, $|\beta''|$ restent inférieures à tout $|\Delta|$ aussi petit que l'on veut, c'est-à-dire de telle façon que le mouvement perturbé soit aussi proche que l'on veut du mouvement non perturbé (équilibre relatif). Or, cette condition, aux termes de la définition de la stabilité au sens de Liapounov, démontre précisément la stabilité du mouvement non perturbé.

Ainsi donc, les conditions suffisantes pour que l'équilibre relatif du satellite en orbite circulaire soit stable sont fournies par la double inégalité (6.3.7). Quant à la grandeur h_0 appelée à garantir les inégalités (6.3.8), on la choisit de telle façon que

$$h_0 < \min \left\{ \frac{3}{2} \omega^2 (A - C) \Delta^2, \ \frac{K1}{2} \omega^2 (B - A) \Delta^2 \right\} ; \qquad (6.3.9)$$

autrement dit, h_0 doit être plus petite que la plus petite des expressions figurant entre accolades dans (6.3.9). Remarquons qu'avec h_0 ainsi choisie, les vitesses angulaires $\bar{p}$, $\bar{q}$, $\bar{r}$ seront de l'ordre de ω tout au plus, conformément à (6.3.6). Ce sont des quantités très petites (pour les satellites artificiels $\omega \approx 0{,}05$ à $0{,}07$ deg/s, et pour la Lune $\omega \sim 0{,}00015$ deg/s). Cela revient à dire que l'effet stabilisateur du champ gravitationnel ne joue vraiment que si l'énergie cinétique de rotation du satellite autour de son centre de masse est insignifiante.

Dans ce raisonnement, qui justifie la stabilité de l'équilibre relatif, nous reprenons en fait le théorème de la stabilité déjà connu de A. Liapounov. Rappelons son énoncé : si les variables du mouvement perturbé peuvent former une fonction définie positive V dont la dérivée $\dot{V}$ est négative ou identiquement nulle en vertu des équations différentielles, le mouvement non perturbé est stable. Dans notre cas, V est le premier membre de (6.3.6) : si la condition (6.3.7) est vérifiée, V est définie positive. Or, puisque V est intégrale première des équations du mouvement, on a $\dot{V} \equiv 0$, d'où la stabilité.

Le théorème de la stabilité de Liapounov convient tout particulièrement aux cas où il n'y a pas de dissipation de l'énergie dans le système considéré, l'équilibre asymptotique étant par suite impossible. Beaucoup de problèmes de stabilité en dynamique du vol spatial ont été résolus à l'aide de ce théorème ou de ses modifications. V. Roumiantsev décrit un grand nombre de problèmes de ce type dans son livre [6.5].

4. *Rhinogradentia* est en orbite !

La première conclusion à tirer de la condition (6.3.7) c'est que le satellite doit être très différent d'une sphère homogène si l'on veut qu'il soit en équilibre relatif stable. En effet, une sphère homogène a $A = B = C$, si bien que l'effet stabilisateur des moments gravitationnels est absolument négligeable.

Analysons la double inégalité (6.3.7) de plus près. Le moment d'inertie maximal B est attaché à l'axe Oy' du satellite, orienté en équilibre relatif — rappelons-le — suivant la normale **n** au plan de l'orbite. Le moment d'inertie minimal C correspond à l'axe Oz' du satellite qui est dirigé en équilibre relatif le long du rayon vec-

teur de l'orbite. On sait que la géométrie des masses d'un solide est définie en mécanique du corps solide par l'ellipsoïde d'inertie central du solide dont les axes ont les mêmes directions que les axes d'inertie centraux principaux Ox', Oy', Oz' du solide et les longueurs des demi-axes a, b, c sont liées aux moments d'inertie centraux principaux A, B, C par les relations

$$a = k/\sqrt{A}, \quad b = k/\sqrt{B}, \quad c = k/\sqrt{C}$$

dans lesquelles k est une constante. Au plus grand moment d'inertie correspond donc le plus petit axe de l'ellipsoïde d'inertie, et *vice versa*.

De tout ce qui précède, on peut tirer la conclusion, déduite par V. Béletski en 1956 et publiée en 1959 [6.4]:

Pour assurer la stabilité de l'équilibre relatif d'un solide en orbite circulaire dans un champ newtonien de forces centrales, il suffit que, dans le mouvement non perturbé, le grand axe de l'ellipsoïde d'inertie central du solide soit dirigé suivant le rayon vecteur de l'orbite, le petit axe suivant la normale au plan de l'orbite et l'axe moyen suivant la tangente à l'orbite (fig. 6.3).

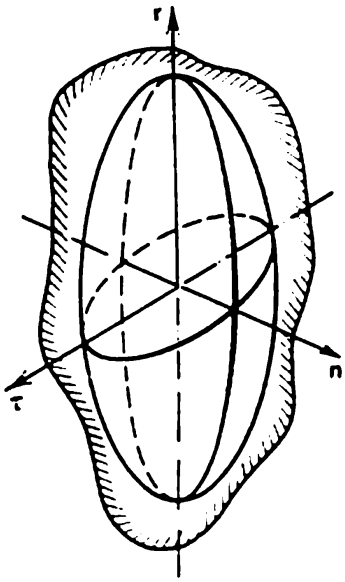


Fig. 6.3. Position stable de l'ellipsoïde d'inertie d'un satellite en orbite

Autrement dit, un satellite, pour être stabilisé par la gravitation, doit être sensiblement aplati en direction du plan de l'orbite et très allongé en direction de la Terre.

Une construction très heureuse en ce sens est la forme du corps de l'animal connu *Rhinogradentia Otopteryx volitans* découvert par le Pr. H. Stümpke et décrit dans son livre *Structure et vie de Rhinogradentiae* [6.6].

5. Sur la stabilisation passive des spoutniks

Nous avons signalé en passant la possibilité de stabiliser un satellite artificiel par gravitation. Or, cette possibilité est quasi fondamentale: elle permet de maintenir le satellite aussi longtemps que l'on veut dans une position analogue à celle de la Lune (une face tournée en permanence vers la Terre) rien qu'avec l'énergie « gratuite » de la gravitation! Il est inutile de rappeler à quel point c'est nécessaire pour les observations météorologiques, les prises de vues de la surface terrestre et de nombreux autres objectifs. Dans son tour d'horizon [6.18], A. Ichlinski a mentionné le principe de la stabilisation gravitationnelle d'un satellite parmi les plus grandes découvertes de la mécanique.

En pratique, réaliser la stabilisation *passive* *) d'un satellite revient tout d'abord à annuler sa vitesse angulaire initiale, qui peut être assez grande. Il est nécessaire de faire rentrer la vitesse angulaire dans une marge très étroite où la stabilisation gravitationnelle du satellite en position donnée commence à « fonctionner ». Tout système de stabilisation gravitationnelle comporte donc des mécanismes d'amortissement (d'annulation) des vitesses angulaires. Sur les satellites naturels des planètes (la Lune et les satellites de Jupiter et de Saturne énumérés au commencement de cet essai) le rôle d'amortisseur est joué par les moments des forces de frottement des marées qui, au cours de l'évolution millénaire, ont « ralenti » la rotation de la Lune et de certains autres corps célestes [6.2]. Quant aux spoutniks, l'amortissement de leurs rotations initiales demande la mise en action d'une force de frottement de nature élastique, magnétique, etc., susceptible de dissiper l'énergie cinétique de la rotation.

Pour la stabilisation passive, on peut utiliser non seulement le champ de gravitation mais aussi les propriétés stabilisatrices du profil aérodynamique, du champ magnétique terrestre, voire la pression de radiation du Soleil.

Pour la première fois le système de stabilisation gravitationnelle a été proposé en U.R.S.S. par D. Okhotsimski en 1956 [6.34]. On trouve dans la littérature la description des systèmes de stabilisation passive de plusieurs satellites artificiels déjà mis en orbite [6.7, 6.8]. On trouve une étude détaillée de la dynamique des systèmes de stabilisation passive dans les travaux de V. Sarytchev [6.9] et d'autres auteurs.

6. Oscillations non linéaires

Sorti par la force des choses de son état d'équilibre relatif, le satellite commence à osciller dans l'espace autour de sa position d'équilibre relatif. Ces oscillations ne sont pas faciles à mettre en équations. La méthode d'analyse la plus usitée est la suivante. Supposons que les écarts par rapport à la position d'équilibre soient très petits, de même que les vitesses angulaires des oscillations. Au lieu des équations exactes du mouvement, on peut alors considérer des équations approchées, ne contenant aucun terme petit d'ordre supérieur à 1. Il importe que la solution de ces équations linéaires reste bornée au cours d'un temps indéfini. En effet, une solution non bornée contredit l'hypothèse de départ selon laquelle les oscillations sont petites. Si donc les oscillations sont bornées et restent aussi petites que l'on veut à la suite d'un écart initial arbitrairement petit, il semble logique de supposer que les conditions de

*) Ce qualificatif est employé pour souligner la différence avec les systèmes *actifs* où la stabilité est obtenue par des moteurs-fusées, des volants et d'autres moyens actifs dont la mise en œuvre consomme inévitablement une fraction de l'énergie emmagasinée à bord du satellite.

stabilité de l'état d'équilibre initial se trouvent vérifiées toutes les fois que les oscillations linéaires sont bornées.

Or, les travaux de A. Liapounov ont clairement montré que des « conditions de stabilité » pareilles, déduites à partir d'équations linéaires, ne sont pas toujours, loin s'en faut, de « vraies » conditions de stabilité. Dans certains cas les équations linéaires semblent indiquer que le mouvement non perturbé (équilibre) initial est stable, alors qu'en réalité il n'en est rien. Notre exemple sur les oscillations tridimensionnelles d'un solide (satellite) dans le champ gravitationnel illustre par excellence la situation décrite.

Considérons les oscillations du satellite en orbite circulaire autour de sa position d'équilibre relatif. Pour que les oscillations linéaires restent bornées, il faut alors [6.1] ou bien que les conditions déjà connues

$$B > A > C \tag{6.6.1}$$

soient vérifiées, ou bien que soit vérifié un système de conditions

$$\left.\begin{aligned} &B < C < A, \\ &\left[\frac{C}{A} + 3\left(\frac{B-C}{A}\right)\frac{C}{A} + \left(\frac{B}{A} - 1\right)\left(\frac{B-C}{A}\right)\right]^2 - \\ &\qquad - 16\,\frac{C}{A}\left(\frac{B-C}{A}\right)\left(\frac{B}{A} - 1\right) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.6.2}$$

Les inégalités (6.6.1), (6.6.2) sont les conditions nécessaires de la stabilité de l'équilibre. Un équilibre stable vérifie nécessairement les conditions (6.6.1), (6.6.2). Or, tout mouvement vérifiant (6.6.1), (6.6.2) n'est pas nécessairement stable. Nous avons montré plus haut que si les conditions (6.6.1) ont lieu (nous dirons : dans le domaine I), l'équilibre relatif est effectivement stable. Les conditions (6.6.1) sont les conditions suffisantes de la stabilité.

Si les conditions (6.6.2) jouent, on ne peut pas en dire autant du mouvement (c'est le domaine II). Pour cerner la nature du mouvement dans le domaine II, ainsi que pour étudier de plus près le mouvement dans le domaine I, on est obligé d'examiner des équations d'oscillations non linéaires. De pareils effets non linéaires ont été envisagés par les chercheurs américains J. V. Breakwell et R. Pringle [6.10]. Nous allons décrire brièvement leur méthode et les résultats qu'ils ont obtenus.

La fonction figurant dans le premier membre de (6.3.3) est le hamiltonien du problème examiné. Après quelques transformations, elle se laisse mettre sous la forme

$$H = \pm\frac{1}{2}\left(\xi_1^2 + \omega_1^2\eta_1^2\right) + \frac{1}{2}\left(\xi_2^2 + \omega_2^2\eta_2^2\right) + \\ + \frac{1}{2}\left(\xi_3^2 + \omega_3^2\eta_3^2\right) + H^{(1)}(\xi_i, \eta_i). \tag{6.6.3}$$

Ici η_i sont des variables angulaires caractérisant des oscillations dites normales, et ξ_i les impulsions respectives. La partie explicitée de H (hormis $H^{(1)}$) correspond justement aux oscillations linéaires de fréquences ω_1, ω_2, ω_3 (exprimées en fonction des moments d'inertie du satellite). Le signe positif dans (6.6.3) et dans la suite se rapporte au domaine I, et le signe négatif, au domaine II, défini respectivement par (6.6.1) et (6.6.2).

Quant à $H^{(1)}$, on n'y trouve que des termes petits d'ordre strictement supérieur à 2 en ξ_i, η_i. Supprimant ces termes, on peut utiliser le reste du hamiltonien pour la déduction des équations linéarisées du mouvement. Leur solution peut s'écrire comme suit :

$$\left.\begin{aligned}
\eta_1 &= \pm\frac{\sqrt{2\alpha_1}}{\omega_1}\sin\omega_1(\tau\pm\beta_1), & \xi_1 &= \sqrt{2\alpha_1}\cos\omega_1(\tau\pm\beta_1),\\
\eta_2 &= \frac{\sqrt{2\alpha_2}}{\omega_2}\sin\omega_2(\tau+\beta_2), & \xi_2 &= \sqrt{2\alpha_2}\cos\omega_2(\tau+\beta_2),\\
\eta_3 &= \frac{\sqrt{2\alpha_3}}{\omega_3}\sin\omega_3(\tau+\beta_3), & \xi_3 &= \sqrt{2\alpha_3}\cos\omega_3(\tau+\beta_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.4)$$

Ici τ est le « temps » et α_i, β_i les constantes d'intégration.

Remarquons que les α_i sont proportionnelles aux carrés des amplitudes des oscillations, $\eta_3(\tau)$ définissant les oscillations longitudinales (dans le plan de l'orbite) et $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau)$ les oscillations transversales du satellite.

Cherchons maintenant la solution des équations exactes du mouvement correspondant au hamiltonien complet (6.6.3). Elle sera cherchée aussi sous la forme (6.6.4), à ceci près que α_i, β_i ne sont déjà plus des constantes mais des fonctions du temps, fonctions qu'il s'agit de déterminer. Une telle méthode de variation des constantes conduit aux équations différentielles

$$\frac{\alpha_i}{\tau} = -\frac{\partial H^{(1)}(\alpha_i, \beta_i, \tau)}{\partial\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{d\tau} = \frac{\partial H^{(1)}(\alpha_i, \beta_i, \tau)}{\partial\alpha_i}. \qquad (6.6.5)$$

Ici on entend par $H^{(1)}$ la partie $H^{(1)}$ de (6.6.3) où les ξ_i, η_i sont remplacées par leurs expressions (6.6.4).

Ces équations, bien connues en mécanique (voir par exemple [6.11]), se prêtent aisément à l'analyse, grâce à leur écriture canonique. Si $H^{(1)} \equiv 0$, il ressort immédiatement de (6.6.5) que $\alpha_i = \text{Cte}$, $\beta_i = \text{Cte}$, ce qui correspond aux oscillations linéaires (6.6.4). Au contraire, pour tout $H^{(1)} \not\equiv 0$, la solution de (6.6.5) définit aussitôt la non-linéarité des oscillations sous forme explicite.

Si les oscillations ne diffèrent pas beaucoup des oscillations linéaires, $H^{(1)}$ est petit, et les équations (6.6.5) peuvent être analysées par une méthode asymptotique, à savoir la méthode de la moyenne.

Il se trouve alors que la valeur moyenne

$$\overline{H^{(1)}} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau H^{(1)} d\tau = 0,$$

à moins que les fréquences ω_i ne soient en résonance

$$\sum_{i=1}^{3} n_i \omega_i = 0,$$

où n_i sont des entiers quelconques (dont l'un — n'importe lequel — peut être nul). Autrement dit, les formules (6.6.4) avec α_i, β_i constants définissent avec grande précision le mouvement réel en dehors des voisinages des résonances. Par contre, au voisinage d'une résonance il n'en est pas ainsi ; la valeur moyenne de $H^{(1)}$ est non nulle.

Supprimons tout terme de $H^{(1)}$ petit d'ordre autre que 3. Sont possibles alors les résonances suivantes du troisième ordre :

$$\text{(I)}\ \omega_3 = 2\omega_1, \quad \text{(II)}\ \omega_3 = \omega_2 - \omega_1, \quad \text{(III)}\ \omega_3 = \omega_2 + \omega_1. \tag{6.6.6}$$

Aucune autre résonance d'ordre 3 ne peut avoir lieu. Le mouvement au voisinage des résonances (6.6.6) a été analysé dans le travail déjà cité [6.10].

Considérons par exemple la résonance (I) de (6.6.6). Soit $\varepsilon = \omega_3 - 2\omega_1$ le « désaccord » de la relation de résonance (I). Alors les équations (6.6.5), dans l'ε-voisinage de la résonance (I) de (6.6.6), admettent en première approximation (au sens de la moyenne) les intégrales premières

$$\alpha_2 = \text{Cte}, \quad \beta_2 = \text{Cte}, \tag{6.6.7}$$

$$H^* = a \frac{2\omega_1}{\omega_2} \alpha_1^* \sqrt{\alpha_3} \cos \omega_3 (\beta_3 \mp \beta_1^*) \mp \frac{\varepsilon}{\omega_3} \alpha_1^* = \text{Cte}, \tag{6.6.8}$$

$$C = \alpha_1^* \pm \alpha_3 = \text{Cte} \tag{6.6.9}$$

dans lesquelles

$$\alpha_1^* = \alpha_1 \frac{\omega_3}{2\omega_1}, \qquad \beta_1^* = \frac{2\omega_1 \beta_1 \mp \varepsilon\tau}{\omega_3}.$$

La constante a dans (6.6.8) ne dépend que des moments d'inertie. Soit $\Phi = \omega_3 (\beta_3 \mp \beta_1^*)$. Il découle alors de (6.6.8) et de (6.6.9) que

$$\cos \Phi = \frac{h_0 \pm \varepsilon_0 \alpha_1^*}{\alpha_1^* \sqrt{\pm (C - \alpha_1^*)}}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2a\omega_1}. \tag{6.6.10}$$

Ici h_0 est une constante d'intégration proportionnelle à H^*.

L'équation (6.6.10) permet de construire les courbes intégrales dans le plan α_1^*, Φ et d'étudier le mouvement. Considérons d'abord

le domaine I répondant à (6.6.1) (signe positif dans (6.6.10). La figure 6.4 montre les courbes intégrales pour deux cas : $|\varepsilon_0| > \sqrt{C}$ et $|\varepsilon_0| < \sqrt{C}$. Nous voyons que dans le premier cas les petites oscillations de « l'amplitude » α_1^* restent d'abord faibles : cela est normal, car l'inégalité $|\varepsilon_0| > \sqrt{C}$ montre que le mouvement est loin de la résonance et, par suite, diffère peu du cas linéaire (c'est-à-dire du cas où $\alpha_1^* = \text{Cte}$). Au contraire, si le désaccord $|\varepsilon_0|$ est suffisamment réduit ($|\varepsilon_0| < \sqrt{C}$, le mouvement est au bord d'une

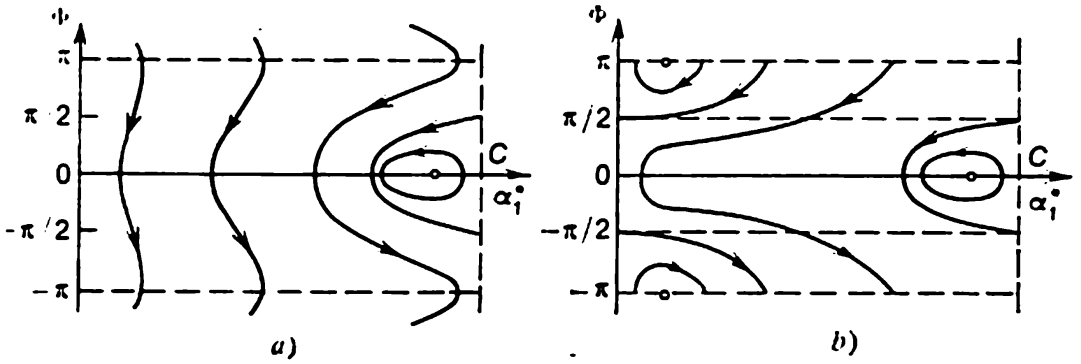


Fig. 6.4. Caractéristique amplitude-phase du mouvement dans le domaine I (conditions suffisantes de la stabilité) : *a*, cas d non-résonance ; *b*, cas de résonance

résonance), la quantité α_1^*, faible à l'origine, tend à croître sensiblement avec le temps comme le montre la figure 6.4, *b*, à moins que $C \approx \alpha_3^0$ ne soit excessivement petit.

Autrement dit, s'il y a résonance, les écarts initiaux par rapport à la position d'équilibre *dans le plan de l'orbite* mènent à une augmentation très prononcée des valeurs angulaires (initialement petites) des oscillations transversales. En vertu de l'intégrale (6.6.9), il se produit d'abord un « transfert » des oscillations du plan de l'orbite dans le plan transversal, puis un « transfert » inverse. C'est le chercheur américain T. R. Cane qui a découvert ce phénomène en faisant l'intégration numérique des équations exactes du mouvement [6.12]. Plus tard, Breakwell et Pringle ont donné une explication [6.10] aux effets découverts par Cane.

Sur les figures 6.5 et 6.6 tirées de [6.12] on voit les variations dans le temps de l'angle représentatif des oscillations transversales d'un satellite. Les données initiales sont les mêmes pour les deux figures, mais la figure 6.5 illustre un cas de résonance et la figure 6.6 un cas de non-résonance. Si dans le second cas l'amplitude des oscillations reste en dessous du demi-degré, elle dépasse allègrement 20° dans le premier !

Tel est le rôle de la résonance. Il convient de noter cependant que les balancements des oscillations en cas de résonance n'affectent na-

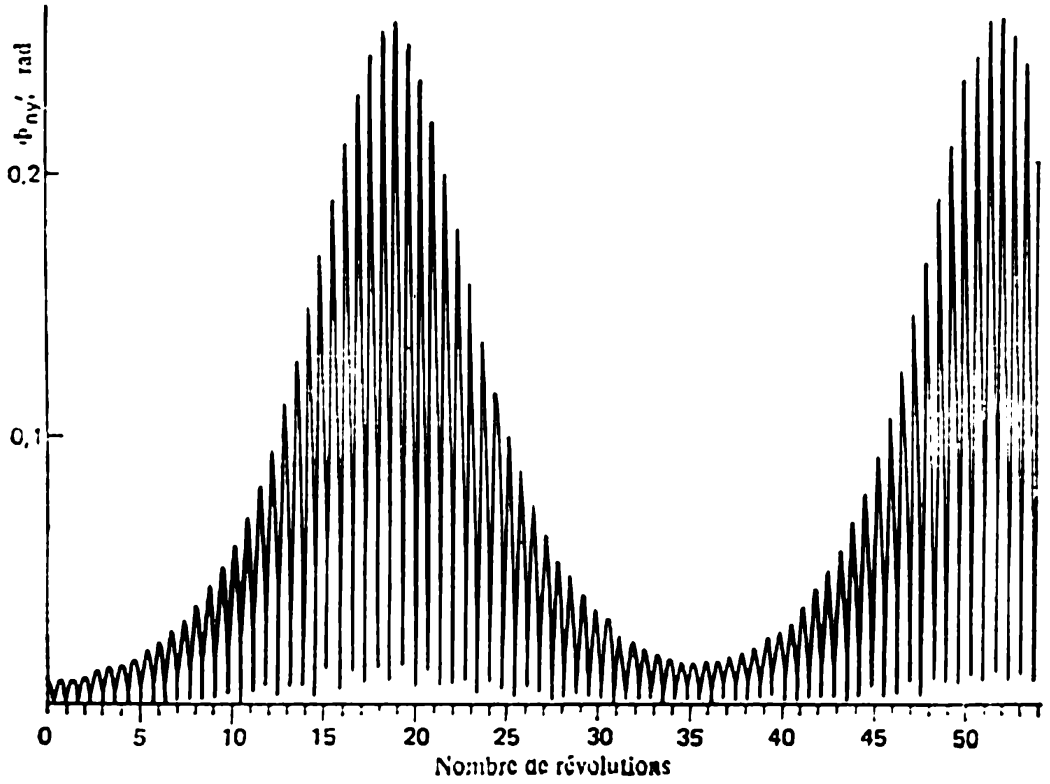


Fig. 6.5. Oscillations transversales sur orbite circulaire en cas de résonance

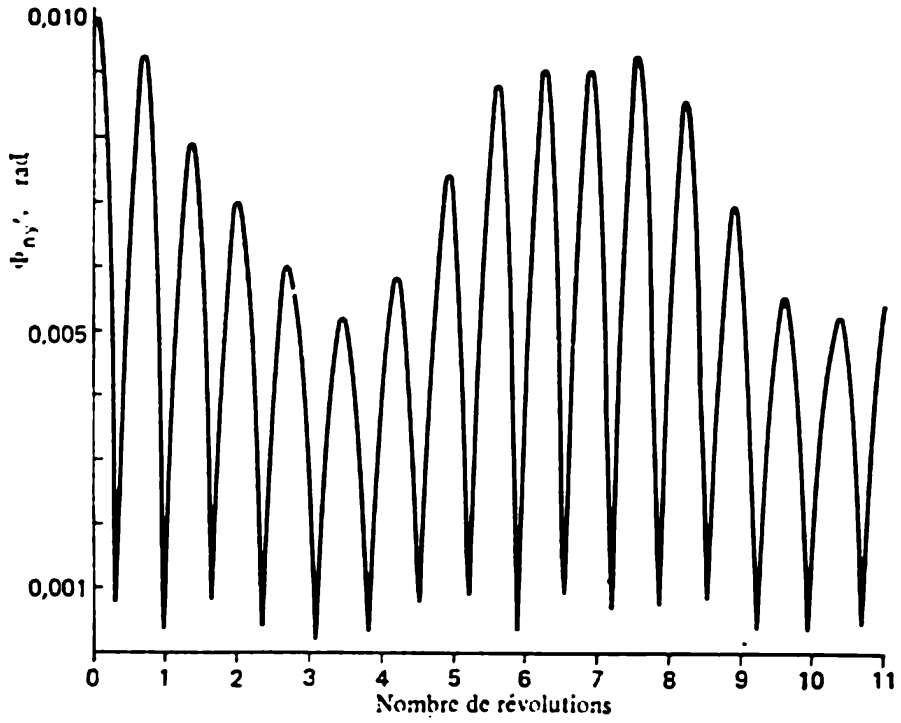


Fig. 6.6. Oscillations transversales sur orbite circulaire en cas de non-résonance

turellement pas la stabilité au sens de Liapounov, démontrée précédemment, de l'équilibre relatif du satellite. En effet, que ce soit la résonance ou non, on peut toujours prendre dans (6.3.6) et (6.3.8) un h_0 tellement petit que l'amplitude des oscillations restera en dessous de n'importe quelle valeur donnée à l'avance. La seule différence c'est que ce choix est conditionné beaucoup plus rigoureusement s'il y a résonance que s'il n'y en a pas.

Passons au domaine II. Les signes dans (6.6.10) sont négatifs. Les « portraits » amplitude-phase du mouvement dans ce domaine

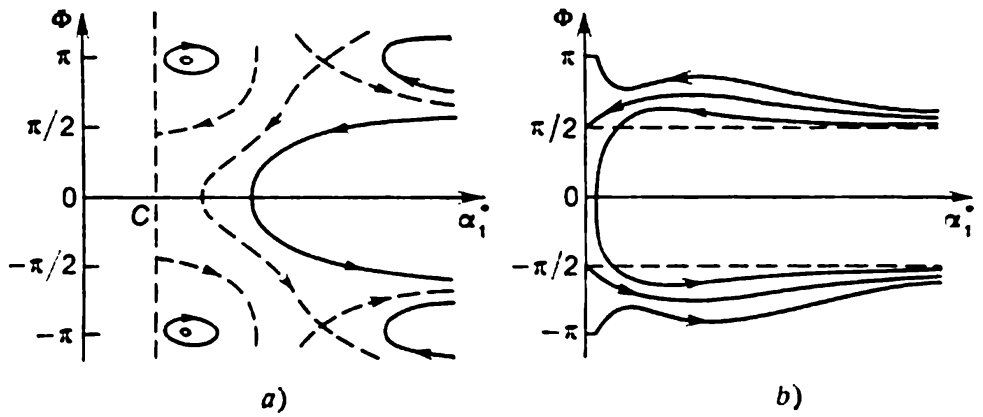


Fig. 6.7. Caractéristique amplitude-phase du mouvement dans le domaine II (conditions nécessaires de la stabilité) : *a*, cas de non-résonance $|\varepsilon_0| > \sqrt{|C|}$; *b*, cas de résonance $|\varepsilon_0| < \sqrt{|C|}$

sont représentés sur la figure 6.7, *a*, *b*. On voit que loin d'une résonance ($|\varepsilon_0| > \sqrt{|C|}$) le mouvement peut rester borné (fig. 6.7, *a*). Or, dès que l'on pénètre dans le voisinage d'une résonance ($|\varepsilon_0| < \sqrt{|C|}$), le mouvement devient non borné (fig. 6.7, *b*)! Telle est la différence qualitative entre le cas où le mouvement vérifie les conditions (6.6.2) (nécessaires) et celui où il vérifie les conditions (6.6.1) (suffisantes).

La meilleure façon de comprendre les courbes de la figure 6.7 est la suivante. Aussi faible que soit le désaccord $|\varepsilon_0| \neq 0$ entre fréquences, on arrive toujours à trouver des données initiales ($\sqrt{|C|} < |\varepsilon_0|$!) telles que le mouvement reste borné; le seul cas où cela s'avère impossible est $|\varepsilon_0| = 0$, c'est-à-dire le cœur même de la résonance. Si une résonance a lieu exactement ($|\varepsilon_0| = 0$), le mouvement dans le domaine II est nécessairement non borné (à l'approximation consentie près). Donc, les oscillations longitudinales et transversales croissent simultanément comme le montre l'intégrale (6.6.9). Tout cela permet d'affirmer qu'un mouvement qui vérifie seulement les conditions nécessaires de la stabilité (6.6.2)

ne peut être vraiment stable que si ses fréquences ne sont pas en résonance ; s'il y a résonance, la stabilité devient précaire.

Cette conclusion est bien sûr approximative (puisque notre analyse l'est). Or, certains travaux de mathématiques [6.13, 6.14] permettent de tirer une conclusion plus rigoureuse. Il se trouve que si les seules conditions nécessaires de la stabilité sont vérifiées et les termes dominants du hamiltonien (6.6.3) constituent une forme quadratique qui n'est pas définie positive, l'équilibre risque d'être *instable* lorsque les fréquences des oscillations linéaires vérifient rigoureusement une relation de résonance d'ordre impair.

Ainsi donc, la stabilité dégagée des équations linéaires demande encore à être démontrée (par exemple par la construction de la fonction de Liapounov). Autrement, elle risque de s'avérer fallacieuse. Elle peut disparaître en cas de résonance. L'analyse des oscillations du satellite autour de sa position d'équilibre relatif en est une preuve tangible.

Remarquons que pour les tâches pratiques de stabilisation d'un satellite, on ne considère que le domaine I (6.6.1) des conditions suffisantes de la stabilité. L'introduction des forces dissipatives confère à la stabilité dans ce domaine un caractère asymptotique. Introduites dans le domaine II (6.6.2), les forces dissipatives compromettent la stabilité et écartent le satellite de sa position d'équilibre vérifiant (6.6.2).

7. Rotations rapides

Les moments gravitationnels étant relativement « faibles », la mise en régime oscillatoire par gravitation du satellite autour de sa position d'équilibre relatif ne peut avoir lieu, comme nous l'avons vu, que si la vitesse angulaire du satellite est relativement petite.

Que deviennent les oscillations si la vitesse angulaire initiale du satellite est assez grande (comme c'est très généralement le cas) ? Alors, les moments des forces extérieures (par exemple des forces de gravité) affectent si faiblement la rotation initiale du satellite qu'on peut supposer sans erreur excessive que la rotation initiale se poursuit par inertie d'une façon inchangée. La rotation d'un solide par inertie autour de son centre de masse est bien connue en mécanique : c'est ce qu'on appelle « mouvement d'Euler-Poinsot ». Or, quoique faible, la perturbation exercée par les moments des forces extérieures est persistante. Les petites perturbations de la rotation initiale du satellite peuvent s'accumuler et, à la longue, changer notablement le mouvement en comparaison avec le mouvement initial. Le problème est clair : il s'agit d'analyser l'évolution du mouvement d'Euler-Poinsot sous l'action des petits moments des forces perturbatrices (comme on analyse en théorie des orbites l'évolution des trajectoires képlériennes sous l'action des petites forces

perturbatrices). Remarquons que les perturbations peuvent aussi être de nature non gravitationnelle.

Le mouvement d'Euler-Poinsot (que nous appellerons parfois « mouvement non perturbé ») se laisse décrire avec une extrême simplicité dans un cas particulier important, à savoir lorsque le satellite est un *solide dynamiquement symétrique*. On entend par là que, parmi les trois moments d'inertie centraux principaux du satellite, deux sont égaux. Soit par exemple $A = B \neq C$. L'axe du

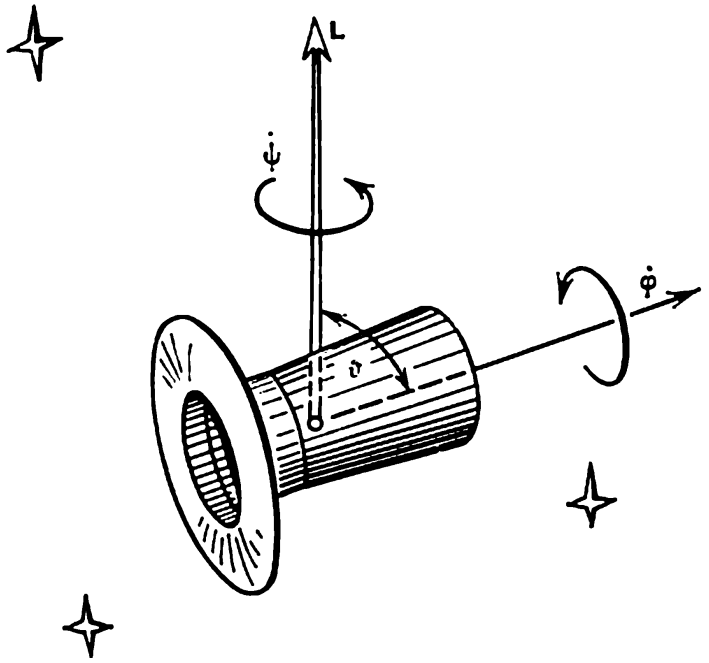


Fig. 6.8. Précession régulière

moment d'inertie C sera appelé *axe de symétrie dynamique* ou *axe longitudinal du satellite*. Dans le texte qui suit, nous partons justement de ce cas élémentaire.

On apprend en mécanique rationnelle que le mouvement d'Euler-Poinsot pour un solide dynamiquement symétrique est sa *précession régulière*. Décrivons ce mouvement (fig. 6.8). Si p, q, r sont les composantes de la vitesse angulaire absolue du satellite suivant les axes d'inertie centraux principaux Ox', Oy', Oz', le *vecteur moment cinétique* **L** aura pour composantes Ap, Bq, Cr suivant les mêmes axes. L'axe Oz' est longitudinal. Il se trouve qu'en mouvement d'Euler-Poinsot *le vecteur moment cinétique* **L** *est constant en grandeur et en direction dans l'espace absolu* (**L** $\equiv$ Cte). En précession régulière, la composante de **L** suivant l'axe longitudinal du satellite est constante, $Cr = Cr_0$. L'axe de symétrie du satellite tourne autour du vecteur moment cinétique en gardant un *écart angulaire constant* ϑ

et une *vitesse angulaire constante* $\dot{\psi}$; en même temps, le satellite « tourne » autour de son axe longitudinal en gardant une *vitesse angulaire constante* $\dot{\varphi}$. Le satellite « valse » autour de son vecteur moment cinétique, tel un danseur infatigable sur le parquet ciré de la salle de danse *).

L'angle ϑ sera appelé *angle de nutation*, et les vitesses angulaires $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}$, *vitesse de la précession* et *vitesse de la rotation propre* respectivement. La position du vecteur moment cinétique peut être définie dans l'espace par la donnée de deux angles constants ρ et σ. La précession régulière se laisse décrire alors par six paramètres

$$L, \ \rho, \ \sigma, \ \vartheta, \ \psi, \ \varphi. \tag{6.7.1}$$

Les quatre premiers sont constants et les deux derniers varient uniformément dans le temps (avec des vitesses constantes $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$).

A présent, « branchons » les moments des forces perturbatrices. Les quatre premiers paramètres (6.7.1) cessent d'être constants en général, et les paramètres φ, ψ commencent à varier dans le temps d'une façon non linéaire. Il s'agit précisément de dévoiler l'allure de la variation ou évolution des paramètres (6.7.1) dans le temps sous l'effet des moments perturbateurs. Nos paramètres (6.7.1) sont analogues aux éléments osculateurs en dynamique des orbites: on doit donc tout d'abord écrire les équations différentielles « en éléments osculateurs » pour les paramètres (6.7.1).

Considérons par exemple les perturbations apportées par le potentiel gravitationnel (6.1.6). Les quantités γ, γ', γ'' qui y figurent doivent être exprimées en fonction de nos nouvelles variables (6.7.1). Il se trouve que pour $A = B$ le potentiel ne dépend pas de φ, de sorte que

$$U = U\,(\rho, \ \sigma, \ \vartheta, \ \psi, \ \omega_0 t). \tag{6.7.2}$$

Le fait que U dépende explicitement du temps s'explique par le déplacement du satellite en orbite avec la vitesse angulaire moyenne ω_0 et, si l'orbite est non circulaire, aussi par le fait que la valeur du rayon vecteur actuel R intervenant dans l'expression (6.1.6) de U est, elle aussi, une fonction (périodique) du temps, $R = R\,(\omega_0 t)$. Le potentiel U est une fonction 2π-périodique par rapport à chacun de ses arguments, si bien qu'on a par exemple $U\,(\psi + 2\pi) = U\,(\psi)$, $U\,(\omega_0 t + 2\pi) = U\,(\omega_0 t)$, etc.

---

*) C'est Nam Tum Po, à l'époque boursier de thèse à l'Université de Léningrad, qui a appliqué le terme « valser » aux satellites.

V. Béletski a montré en 1962 [6.15, 6.1] que les équations écrites « en éléments osculateurs » se présentent en l'occurrence sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dL}{dt}=\frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{L\sin\rho}\,\frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ &\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{L\sin\rho}\left(\frac{\partial U}{\partial \psi}\cos\rho-\frac{\partial U}{\partial \sigma}\right), \\ &\frac{d\psi}{dt}=\frac{L}{A}-\frac{1}{L}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\operatorname{cotg}\rho+\frac{\partial U}{\partial \vartheta}\operatorname{cotg}\vartheta\right), \end{aligned}\right\} \tag{6.7.3}$$

$$\cos\vartheta = Cr_0/L. \tag{6.7.4}$$

Ces équations sont valables non seulement pour les perturbations gravitationnelles mais aussi pour toute perturbation relevant d'une fonction de forces du type (6.7.2). (Sous certaines conditions ce peuvent être des moments aérodynamiques, des moments magnétiques, des moments des forces de pression de radiation.) La grandeur φ n'est pas mise en équation dans (6.7.3) car les seconds membres ne dépendent pas de φ et l'équation pour φ pourra être intégrée séparément (par une simple quadrature, après que le système (6.7.3) aura été intégré). Tout revient donc à intégrer le système (6.7.3) de quatre équations différentielles du premier ordre (compte tenu de la relation finie (6.7.4)).

S'il n'y a aucun moment perturbateur, on a $U \equiv 0$ et les équations (6.7.3) donnent $L = L_0$ (auquel cas il ressort de (6.7.4) que $\vartheta = \vartheta_0$), $\rho = \rho_0$, $\sigma = \sigma_0$, $\dot{\psi} = L_0/A \equiv \dot{\psi}_0$, ce qui correspond précisément au mouvement non perturbé, c'est-à-dire à la précession régulière. Supposons que de petites perturbations U soient en jeu, si petites que $L/A \gg \max |U|/L$; alors les variables L, ρ, σ dans (6.7.3) seront lentes et la variable ψ rapide, au sens des méthodes asymptotiques. Pour la discussion de ces équations, nous pourrons utiliser avantageusement la méthode déjà connue de passage à la moyenne suivant la variable rapide. Remarquons qu'en réalité les équations (6.7.3) contiennent deux variables rapides ψ et $\tau = \omega_0 t$. Or, ψ varie généralement avec une vitesse de l'ordre de 1 à 10 deg/s, et τ, avec une vitesse de l'ordre de 0,05 à 0,07 deg/s; il est donc légitime de supposer que ψ et τ ne soient pas en résonance (c'est-à-dire que les fréquences $\dot{\psi}_0$ et ω soient incommensurables), ce qui permet de faire la moyenne suivant ψ seulement.

Soit

$$\overline{U}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,d\psi. \tag{6.7.5}$$

Rappelons que, U étant une fonction périodique de ψ, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial U}{\partial\psi}\,d\psi=\frac{1}{2\pi}\{U(2\pi)-U(0)\}=0.$$

Le système (6.7.3) et l'égalité (6.7.4) nous donnent alors aussitôt les relations

$$L=L_0,\quad \cos\vartheta=\cos\vartheta_0, \tag{6.7.6}$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{L_0}{A}-\frac{1}{L_0}\left\{\frac{\partial\overline{U}}{\partial\rho}\operatorname{cotg}\rho+\frac{\partial\overline{U}}{\partial\vartheta}\operatorname{cotg}\vartheta\right\} \tag{6.7.7}$$

et un système canonique de deux équations différentielles

$$\frac{d\rho}{dt}=-\frac{1}{L_0\sin\rho}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\sigma},\qquad \frac{d\sigma}{dt}=\frac{1}{L_0\sin\rho}\frac{\partial\overline{U}}{\partial\rho}. \tag{6.7.8}$$

Reste à intégrer deux équations (6.7.8), après quoi la vitesse de la précession perturbée se déduira (avec le petit appoint figurant

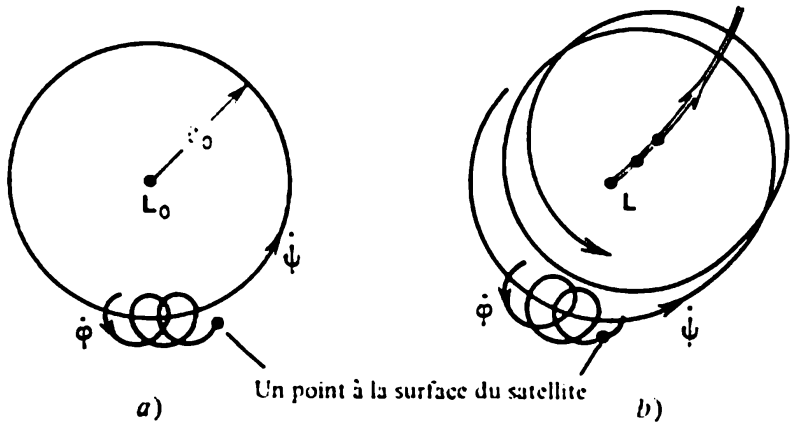
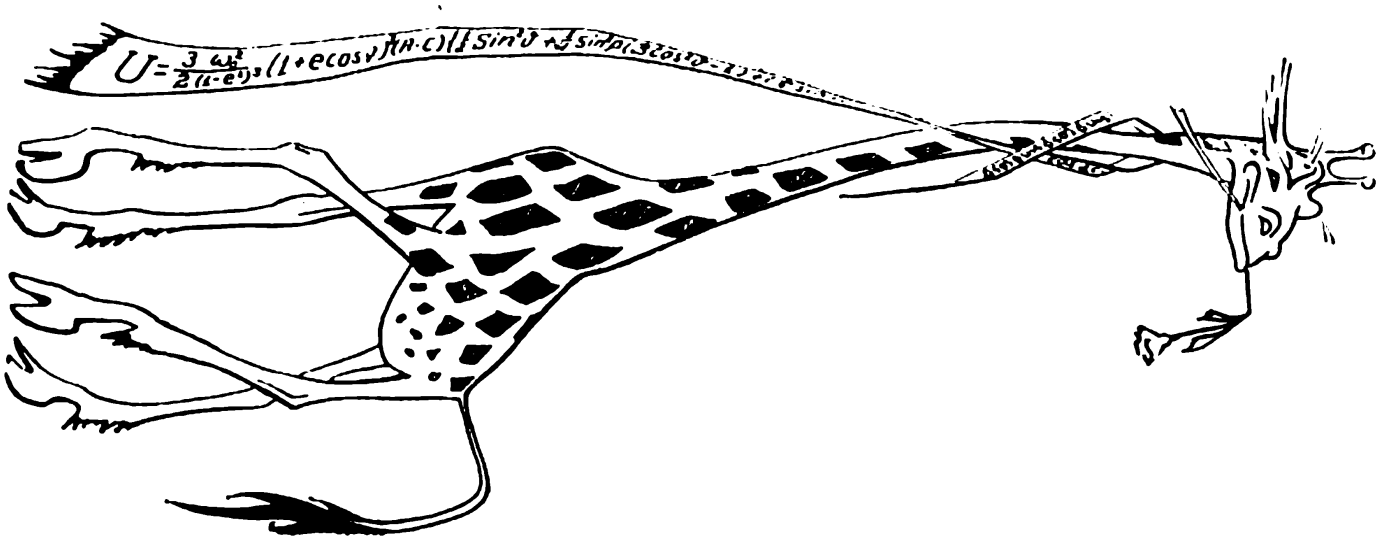


Fig. 6.9. « Figures de la valse »: *a*, mouvement non perturbé; *b*, mouvement perturbé

entre accolades dans (6.7.7)) à partir de (6.7.7). On peut tirer de (6.7.6)-(6.7.8) une conclusion essentielle que voici [6.16, 6.15]:

Le mouvement perturbé d'un satellite dynamiquement symétrique dans un champ dérivant du potentiel (6.7.2) est une précession quasi régulière, caractérisée par une vitesse modifiée (6.7.7), dont l'effet est une rotation de l'axe de symétrie du satellite avec un écart angulaire constant ϑ_0 autour de son vecteur moment cinétique **L** qui garde une grandeur constante. *L'effet principal des perturbations est la variation de la direction du vecteur* **L** *dans l'espace*, décrite par les équations (6.7.8).

Bref, la « figure de la valse » du satellite représentée sur la figure 6.8 se trouve compliquée seulement par la lente variation de la



direction du vecteur **L**. Les schémas de la figure 6.9 représentent les deux « figures de la valse », non perturbée et perturbée.

Les équations fondamentales du mouvement perturbé (6.7.8) seront appelées *équations d'évolution*.

8. L'auteur cherche à intimider le lecteur

Loin, au loin sur les plages du Tchad.
Vague la fine girafe.

N. Goumiliov

L'auteur trouve que les équations d'évolution (6.7.8) sont vraiment fines. Et pas tellement à cause de leur forme que parce que le mouvement perturbé est entièrement maîtrisé par ces deux équations fort simples (donc élégantes). Cette élégance pourtant n'est qu'illusoire. En effet, avant de pouvoir s'en servir, on est obligé d'expliciter la formule (6.7.2) de la fonction de forces U. Or, cette formule n'est point simple, au contraire elle est fort encombrante. Le mécanicien chercheur se sert quelquefois dans son travail d'outils bien laids et biscornus. Comme quoi tout moyen est bon pour connaître la vérité.

Rien que pour bien faire entrer cette idée dans la tête du lecteur, nous allons écrire l'expression (6.7.2) sous forme explicite. La voilà : en laissant dans (6.1.6) les termes essentiels pour l'étude du mouvement autour du centre de masse et en posant $A = B$, on obtient

$$U = \frac{3}{2}\,\frac{\omega_0^2}{(1-e^2)^3}\,(1+e\cos\nu)^3\,(A-C)\,\gamma''^2, \tag{6.8.1}$$

où

$$\begin{aligned}\gamma''^2 = {} & \frac{1}{2}\sin^2\vartheta + \frac{1}{4}\sin^2\rho\,(3\cos^2\vartheta - 1) + \\ & + \frac{1}{4}\sin^2\rho\,(3\cos^2\vartheta - 1)\cos 2(\nu - \sigma) + \\ & + \sin\rho\cos\rho\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi + \frac{1}{4}\sin^2\vartheta\sin^2\rho\cos 2\psi + \\ & + \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\rho\,(1+\cos\rho)\sin(\psi - 2\nu + 2\sigma) - \\ & - \frac{1}{2}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\rho\,(1-\cos\rho)\sin(\psi + 2\nu - 2\sigma) - \\ & - \frac{1}{2}\sin^2\vartheta\,(1+\cos\rho)^2\cos(2\psi - 2\nu + 2\sigma) - \\ & - \frac{1}{8}\sin^2\vartheta\,(1-\cos\rho)^2\cos(2\psi + 2\nu - 2\sigma).\end{aligned}$$

Il est à noter que l'anomalie vraie ν est liée au temps sans dimension $\tau = \omega_0 t$ par la formule

$$\tau = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\,\mathrm{tg}\,\frac{\nu}{2} - \frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+e\cos\nu}\sin\nu. \tag{6.8.2}$$

Dans les formules (6.8.1), (6.8.2) e est l'excentricité de l'orbite et $\omega_0 = \mu^{1/2}a^{-3/2}$ le moyen mouvement sur l'orbite de demi-grand axe a. Les angles ρ et σ ont des valeurs parfaitement concrètes : ρ est l'angle compris entre le vecteur moment cinétique **L** et la normale **n** au plan de l'orbite. et σ est l'angle mesuré dans le plan de l'orbite entre la direction du péricentre de l'orbite et la projection du vecteur **L** sur le plan de l'orbite.

J'espère que la vue des formules (6.8.1), (6.8.2) n'aura pas intimidé le lecteur outre mesure. Si je ne me retenais, je me ferais un plaisir d'expliciter U pour un solide à trois axes ($A \neq B \neq C$) *).

9. Notation explicite du mouvement perturbé

Pour déduire de l'expression (6.8.1) de U l'expression de $\bar{U}$ qui intervient dans les équations d'évolution (6.8.1), il suffit de « se délester » de tous les termes où une fonction trigonométrique de ψ apparaît en facteur. De toute façon ces termes seront « escamotés » par la mise en moyenne dans (6.7.5). S'étant débarrassé des termes indiqués, on remarque que $\bar{U}$ se présente déjà sous une forme beaucoup plus simple. Malheureusement, $\bar{U}$ reste une fonction explicite du temps (par l'entremise de ν). Cette propriété fâcheuse fait que les équations (6.7.8) ne se prêtent pas à l'intégration.

Dans cette situation, deux issues sont possibles :

1° une solution particulière : si l'orbite est circulaire ($e = 0$), les équations (6.7.8) se laissent réduire à une forme intégrable par la substitution $\varkappa = \nu - \sigma$ [6.1, 6.15] ;

2° une solution générale : quelle que soit l'orbite, on peut considérer τ comme une variable rapide et procéder de nouveau par une méthode asymptotique en passant à la moyenne suivant τ dans les seconds membres des équations (6.7.8).

Choisissons la seconde méthode. Au lieu de $\bar{U}$, on doit porter alors dans (6.7.8)

$$\tilde{U} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar{U}\, d\tau = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} U\, d\psi\, d\tau.$$

Cette intégrale se calcule sans peine en prenant ν au lieu de τ : en effet, $\bar{U}$ dépend explicitement de ν et

$$d\tau = \frac{d\tau}{d\nu}\, d\nu = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e\cos\nu)^2}\, d\nu.$$

*) Les rotations rapides sans résonance d'un satellite à trois axes dans le champ gravitationnel ont été étudiées par F. Tchernoussko [6.17].

Après avoir transformé U comme décrit, on déduit de (6.8.1)

$$\tilde{U} = \frac{3}{2}\frac{\omega_0^2}{(1-e^2)^{3/2}}(A-C)\left\{\frac{1}{2}\sin^2\vartheta + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4}\sin^2\rho\,(3\cos^2\vartheta - 1)\right\}. \quad (6.9.1)$$

Portons (6.9.1) dans (6.7.8) au lieu de $\bar{U}$; il vient aussitôt [6.16, 6.1]

$$\rho = \rho_0, \quad \frac{d\sigma}{d\tau} = \frac{3}{4}\frac{(A-C)\,\omega_0}{L_0\,(1-e^2)^{3/2}}(3\cos^2\vartheta_0 - 1)\cos\rho_0. \quad (6.9.2)$$

La constance de ρ découle de la première équation (6.7.8), parce que $\tilde{U}$ ne dépend pas de σ : tous les termes en σ de (6.8.1) seront filtrés après deux mises en moyenne. Ainsi donc, le mouvement perturbé du vecteur moment cinétique dans le champ gravitationnel n'a rien de sorcier : le vecteur moment cinétique précessionne autour de la normale **n** au plan de l'orbite en gardant un écart angulaire ρ_0 constant de la normale et une vitesse angulaire (6.9.2) constante. Rappelons que, dans sa « danse » sur l'orbite, le satellite précessionne régulièrement autour du vecteur moment cinétique conformément aux formules (6.7.6) et (6.7.7). Dans cette dernière formule on doit mettre désormais $\tilde{U}$ au lieu de $\bar{U}$: la vitesse angulaire de la précession $\dot{\psi}$ devient alors rigoureusement constante.

Si le mouvement non perturbé se réduit à une simple rotation autour de l'axe de symétrie (c'est un cas particulier de la précession régulière), on a $\vartheta_0 = 0$ et $L = Cr_0$; c'est précisément ce cas que l'on examine en mécanique céleste classique (précession de l'axe terrestre sous l'action des attractions solaire et lunaire). Les formules (6.9.2) se réduisent dans ce cas particulier aux formules classiques de la vitesse de précession de l'axe de la Terre. On sait que la période de cette précession n'est pas courte : elle est de 26 000 ans... En ce qui concerne les spoutniks, les effets sont beaucoup plus « pesants, grossiers, visibles » *) : la période de la précession du vecteur moment cinétique calculée d'après (6.9.2) ne dépasse pas quelques jours.

10. Pégase

Nous avons oublié — ou presque — que l'orbite du satellite changera elle-même d'une façon notable pendant ces quelques jours. En effet, nous avons vu dans les premiers essais qu'à cause de la forme aplatie de la Terre le plan de l'orbite du satellite tourne (précessionne) autour de l'axe terrestre avec la vitesse

$$\frac{d\Omega}{d\tau} = -\frac{\bar{\varepsilon}R_{\text{éq}}^2}{p^2}\cos i \equiv K_\Omega \quad (6.10.1)$$

*) Expression de Maïakovski. (*N.d.T.*)

(c'est la vitesse du mouvement du nœud ascendant Ω de l'orbite) et que, de surcroît, l'orbite pivote dans son propre plan avec la vitesse

$$\frac{d\omega_\pi}{d\tau} = \frac{\bar{\varepsilon} R_{\text{éq}}^2}{2p^2}(5\cos^2 i - 1) \equiv K_\omega \tag{6.10.2}$$

(c'est la vitesse du mouvement du péricentre ω_π de l'orbite) *). La simplicité remarquable du mouvement perturbé (6.9.2) du vecteur moment cinétique tient tout bonnement au fait que nous avons omis l'évolution de l'orbite définie par (6.10.1), (6.10.2). Or, un calcul effectué par exemple suivant la formule (6.10.1) montre qu'une orbite typique d'un satellite aura tourné de 360° dans l'espace au bout de 10 à 12 jours.

L'auteur a examiné l'influence de l'évolution de l'orbite sur celle de la rotation et de l'orientation du satellite dans ses travaux [6.16, 6.19], puis en a déduit une théorie complète dans [6.1] compte tenu des différents moments de forces exercés sur le satellite. S. Trouchine a ajouté quelques détails élégants à notre théorie dans son essai [6.20]. Conformément aux résultats dégagés dans tous les travaux énumérés, mettons en équations le mouvement perturbé du vecteur moment cinétique:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho}{d\tau} &= +K_\Omega \sin i \sin \Sigma, \\ \frac{d\Sigma}{d\tau} &= 2K_g \cos\rho - K_\Omega(\cos i - \sin i \operatorname{cotg}\rho \cos\Sigma). \end{aligned}\right\} \tag{6.10.3}$$

Ici la constante

$$K_g = \frac{3}{8}\,\frac{(A-C)\,\omega_0}{L_0\,(1-e^2)^{3/2}}(3\cos^2\vartheta_0 - 1)$$

et la constante K_Ω est définie par (6.10.1). La variable ρ a le même sens qu'auparavant, et la nouvelle variable Σ est liée à notre variable ancienne σ par la relation

$$\Sigma = \sigma + \omega_\pi - \frac{\pi}{2}.$$

Remarquons en passant que pour un satellite triaxial ($A \neq B \neq C$) les équations d'évolution s'écrivent tout aussi bien sous la forme (6.10.3), à ceci près que le coefficient constant K_g se calcule par une formule plus compliquée, établie par F. Tchernoussko [6.17].

La signification des équations (6.10.3) est facile à saisir. Considérons la sphère céleste (fig. 6.10) en y marquant l'équateur céleste.

*) Les notations utilisées dans (6.10.1) et (6.10.2) sont les suivantes: $R_{\text{éq}}$, rayon équatorial de la Terre (6371 km); p, demi-paramètre focal de l'orbite; i, inclinaison de l'orbite sur l'équateur; $\bar{\varepsilon} = 0.0016331$, paramètre sans dimension introduit pour tenir compte de l'aplatissement du globe terrestre.

son intersection avec le plan de l'orbite et la trace du vecteur moment cinétique **L**. Supposons que le moment des forces de gravité soit nul (comme tous les autres d'ailleurs). Alors le vecteur **L** reste immobile dans l'espace absolu (dans le système de coordonnées XYZ dont l'axe X est dirigé sur le point vernal et l'axe Z sur le pôle Nord du monde) mais change sa position par rapport à l'orbite à cause de l'évolution de cette dernière. Autrement dit, les angles ρ et σ définissant la position du vecteur **L** par rapport à l'orbite changent en raison de la

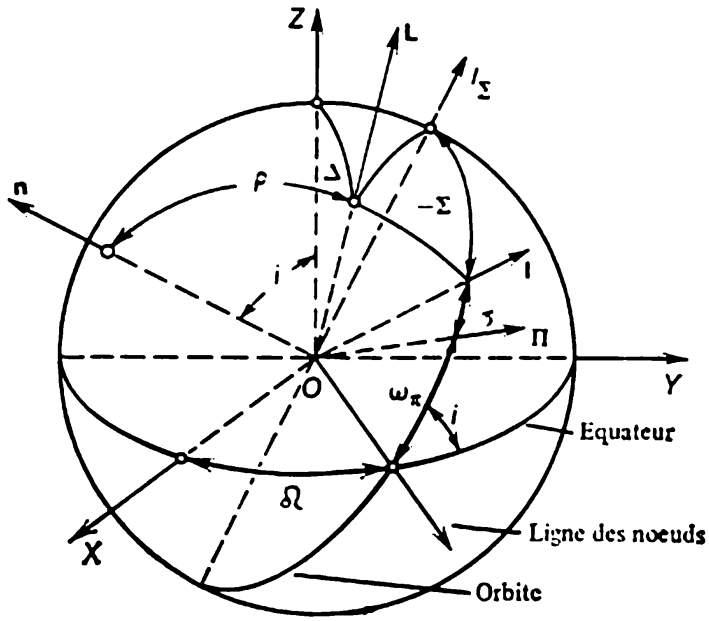


Fig. 6.10. Positions relatives du vecteur moment cinétique et de l'orbite : Z, direction du pôle Nord du monde ; X, direction du point vernal ; **n**, normale au plan de l'orbite ; **L**, vecteur moment cinétique ; $O\Pi$, rayon vecteur du périgée de l'orbite ; **l**, projection de **L** sur le plan de l'orbite ; l_Σ, ligne de référence de l'angle Σ

variation des angles Ω et ω_π qui définissent la position de l'orbite. En regardant bien la figure 6.10, on s'assure que la variation de l'angle ω_π (déplacement du péricentre de l'orbite dans son plan) n'affecte pas l'angle ρ (entre la normale **n** au plan de l'orbite et la direction de **L**) mais fait changer en revanche l'angle σ : tout accroissement $\Delta\omega_\pi$ entraîne un accroissement $\Delta\sigma = -\Delta\omega_\pi$.

Il y a donc intérêt à remplacer σ par un autre angle qui ne dépende pas du mouvement du péricentre. Ce peut être par exemple la somme $\sigma + \omega_\pi$ qui détermine la position angulaire de la projection **l** du vecteur **L** sur le plan de l'orbite par rapport à la ligne des nœuds. Cet angle reste inchangé malgré les déplacements du périgée. Or, il est préférable d'introduire l'angle $\Sigma = \sigma + \omega_\pi - \pi/2$, afin de pouvoir mesurer l'angle de rotation du vecteur **L** à partir du « point le plus haut » de l'orbite (sur la figure 6.10 est montré l'angle $-\Sigma$).

De cette façon les angles ρ, Σ sont insensibles au déplacement du périgée de l'orbite. Par contre, ils sont sensibles au déplacement du nœud de l'orbite. On peut calculer les vitesses de leur variation :

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_1 = K_{\Omega} \sin i \sin \Sigma,$$

$$\left(\frac{d\Sigma}{d\tau}\right)_1 = -K_{\Omega} (\cos i - \sin i \operatorname{cotg} \rho \cos \Sigma),$$

où K_{Ω} est la vitesse du mouvement du nœud de l'orbite (voir (6.10.1) ci-dessus). L'angle Σ change, en outre, avec la vitesse (6.9.2) sous l'effet du moment gravitationnel. En faisant la somme de toutes les vitesses de variation de ρ d'abord, de Σ ensuite, nous obtenons les deux équations d'évolution (6.10.3).

Il est possible de mettre ces équations sous forme canonique à seconds membres indépendants du temps, qui donneront lieu à une intégrale première de (6.10.3) :

$$K_{\Omega} (\cos i \cos \rho + \sin i \sin \rho \cos \Sigma) - K_g \cos^2 \rho = h_0. \quad (6.10.4)$$

Ici h_0 est une constante d'intégration. L'équation (6.10.4) définit une famille de trajectoires possibles $\rho(\Sigma, h_0)$ de l'extrémité du vecteur moment cinétique. Il est naturel que pour $K_{\Omega} = 0$ ce soit un ensemble de petits cercles $\rho = \rho_0$ (le long desquels **L** précessionne sous l'effet des moments gravitationnels), et pour $K_g = 0$, un ensemble de petits cercles $\Delta = \Delta_0$, où Δ est l'angle entre **L** et la direction Z du pôle du monde (fig. 6.10). (En effet, si l'influence des moments gravitationnels cesse, le vecteur **L** reste fixe dans l'espace et donc l'angle Δ est constant.) Par contre, si K_{Ω} et K_g sont tous les deux non nuls, la famille de trajectoires (6.10.4) devient beaucoup plus compliquée. Toutes les trajectoires sont fermées et symétriques par rapport au grand cercle $\Sigma = 0, \pi$. Comme le montrent les seconds membres des équations (6.10.3), ces méridiens portent les points fixes (pôles) de la famille des trajectoires de coordonnées $\Sigma = 0, \pi$, $\rho = \rho_\pi$, où ρ_π vérifie l'équation

$$K_g \sin 2\rho_\pi - K_{\Omega} \sin (\rho_\pi \mp i) = 0. \quad (6.10.5)$$

Il y a deux ou quatre points fixes, suivant les valeurs de i et du paramètre $\varkappa = -K_g/K_{\Omega}$. C'est ainsi que pour $|\varkappa| > 1$ il y a toujours exactement quatre points fixes, quelle que soit la valeur de i. D'une façon tout à fait exacte [6.14], il y a deux points fixes si

$$|2\varkappa|^{2/3} < \sin^{2/3} i + \cos^{2/3} i$$

et quatre points fixes si l'inégalité est inverse.

Les courbes de la figure 6.11 illustrent approximativement la variation de ρ_π en fonction de i définie par (6.10.5) pour un $\varkappa > 1$

fixé (sensiblement égal à 1,1). Le trait continu montre l'ensemble des valeurs de ρ_π correspondant aux pôles stables des trajectoires, et le trait interrompu, aux pôles instables. Prenant une section $i =$ $=$ Cte, nous voyons qu'à toute valeur fixe de i, à l'exception de 0° et de 90°, correspond une famille de trajectoires à trois pôles stables et à un pôle instable. Un pôle (stable) est toujours porté par le méridien $\Sigma = \pi$, et les trois autres par le méridien $\Sigma = 0$. Ces trajectoires se présentent comme il est montré sur la figure 6.12.

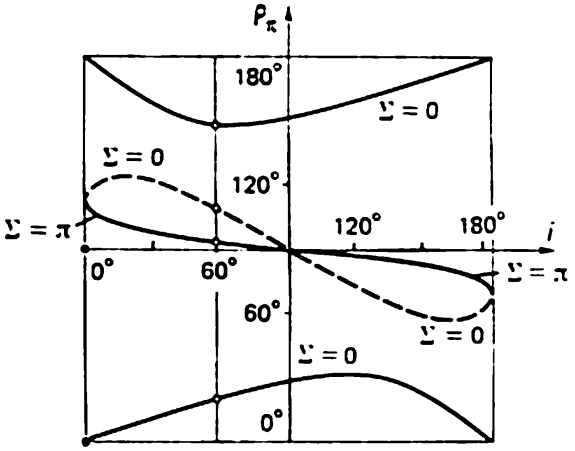


Fig. 6.11. Position angulaire ρ_π du pôle des trajectoires en fonction de l'inclinaison i de l'orbite pour $\varkappa > 1$

En examinant ce tableau, nous remarquons qu'au voisinage du point singulier *1* le mouvement est sensiblement « gravitationnel » : il ressemble à une précession « irrégulière » du vecteur moment cinétique autour de la normale au plan de l'orbite. Au vosinage du point singulier *4*, le mouvement est tout autre : l'extrémité du vecteur **L** décrit une courbe fermée allongée autour du point *4* qui appartient au

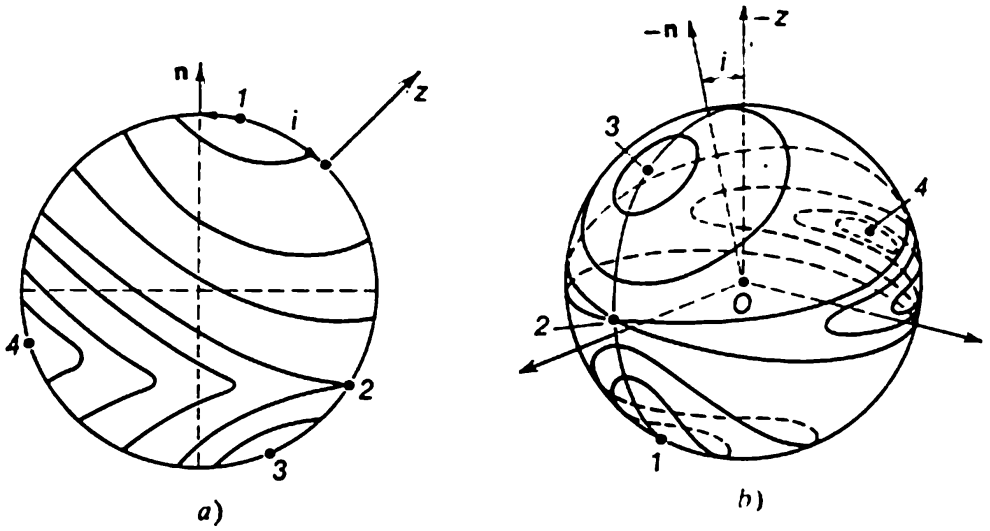


Fig. 6.12. Famille des trajectoires suivies par l'extrémité du vecteur moment cinétique

méridien $\Sigma = \pi$ et qui est situé près du plan de l'orbite. Mieux : un tel mouvement persiste, quelque grande que soit la valeur de $|\varkappa|$ (à condition qu'elle reste finie). Bien que petit devant l'influence

des moments gravitationnels (K_g), l'effet provoqué par le déplacement du nœud de l'orbite (K_Ω) engendre toujours une famille de trajectoires au voisinage du point *4* très différentes des trajectoires du type gravitationnel. Pour $|K_g| \gg |K_\Omega|$ les pôles *1* et *3* se rapprochent des points $\rho = 0$ et $\rho = \pi$ respectivement, tandis que les pôles *2* et *4* auront la coordonnée ρ sensiblement égale à $\pi/2$. Mais la zone du mouvement « non gravitationnel » persiste cependant sous la forme d'un « isthme » étroit de part et d'autre du plan de l'orbite; sa largeur ne tend vers zéro que pour $\varkappa \to \infty$.

Telle est l'influence inattendue et manifestement non triviale de l'évolution de l'orbite sur celle du mouvement autour du centre

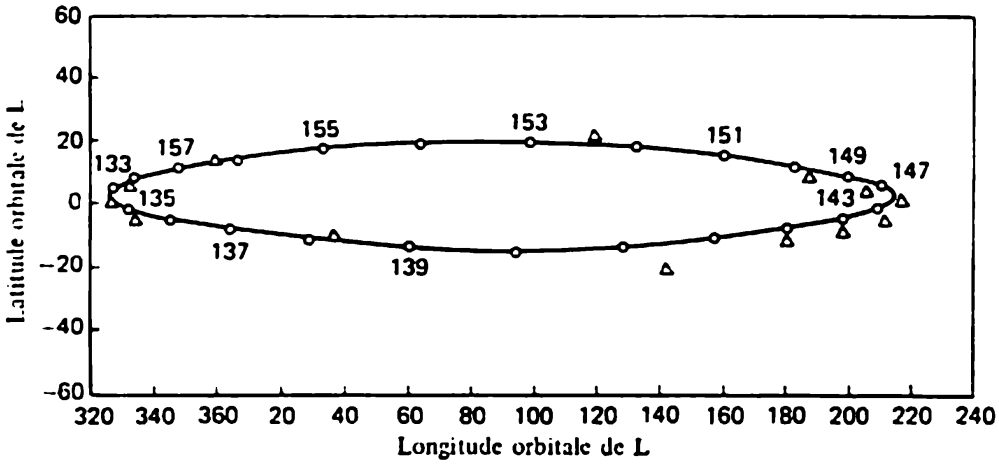


Fig. 6.13. Trajectoire suivie par l'extrémité du vecteur moment cinétique du satellite *Pegasus*. Les résultats théoriques sont montrés en trait continu, et les résultats de l'observation, par les petits triangles. Les chiffres affectant les points de la courbe indiquent les jours de vol à partir du début de l'année 1965

de masse. Ces effets sont décrits plus en détail dans le livre [6.1] (chapitre 9, § 4; voir aussi le chapitre 8).

Maintenant il est temps d'expliquer pourquoi le nom du fameux cheval ailé figure au titre de ce n°. Qu'a-t-il à voir avec l'évolution du mouvement? Il se trouve que le mouvement d'un satellite artificiel américain autour de son centre de masse correspond très exactement aux résultats que nous venons d'exposer; or ce satellite se prénomme *Pegasus*. Le caractère de l'évolution de ce mouvement a été déterminé par des moyens expérimentaux *) et confronté avec les données théoriques dans le travail de deux chercheurs américains [6.21] **). Le Pégase en question était influencé principalement par le moment gravitationnel et le déplacement du nœud de l'orbite,

*) Nous examinerons ces moyens de plus près dans notre douzième essai.
**) La théorie exposée dans [6.21] reprend des résultats antérieurs communiqués dans [6.1, 6.17].

si bien que l'évolution de sa rotation doit être conforme aux équations (6.10.3). Sur la figure 6.13 tirée de [6.21] on voit en trait continu la trajectoire de l'extrémité du vecteur moment cinétique du satellite *Pegasus* calculée d'après les équations (6.10.3) ; les triangles marquent les positions observées. On voit que les triangles s'alignent exactement suivant une courbe ovale exotique distendue le long du plan de l'orbite, courbe qui correspond au mouvement suivant une des trajectoires au voisinage du point *4* sur la figure 6.12.

11. Lune, Mercure, résonances...

Les équations (6.7.3) dans lesquelles la fonction de forces U est définie par (6.8.1) ont une forme particulière répondant aux oscillations du satellite dans le plan de l'orbite $\rho = 0$, $\vartheta = 90°$, $\sigma = \sigma_0$. Dans ce cas il ne reste dans (6.7.3) que deux équations

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{L}{A} \tag{6.11.1}$$

équivalentes à une équation unique du second ordre

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial \psi}\frac{1}{A} = 0 \tag{6.11.2}$$

dans laquelle

$$U = -\frac{3\omega_0^2}{4(1-e^2)^3}(1+e\cos\nu)^3(A-C)\cos(2\psi - 2\nu + 2\sigma_0). \tag{6.11.3}$$

Nous avions supposé que ψ était une variable rapide. Maintenant ce n'est plus obligatoire ; en revanche, nous supposerons que la différence des moments d'inertie $A - C$ est petite, si bien que le satellite est sensiblement dynamiquement sphérique. Ce cas est important pour les satellites naturels et les planètes.

Si $A - C = 0$, la solution des équations (6.11.1) ou (6.11.2) définit une rotation uniforme :

$$\psi = \Omega\tau + \psi_0, \quad \tau = \omega_0 t. \tag{6.11.4}$$

Si la différence $A - C$ est non nulle mais petite, on peut chercher une solution de (6.11.2) proche de la rotation uniforme (6.11.4) par des méthodes asymptotiques (en assimilant la différence des moments d'inertie au petit paramètre). F. Tchernoussko a fait une telle recherche dans son travail [6.22]. Cherchons la solution des équations (6.11.1) sous la forme (6.11.4), où ψ_0 est une nouvelle variable.

Il est commode de remplacer ψ_0 par une autre variable δ liée à ψ_0 d'une façon linéaire :

$$2\delta = \pi + 2(\sigma_0 + \psi_0).$$

Soit en outre $\Omega = m/2$. Il vient

$$\frac{\partial U}{\partial \psi} = \frac{\partial U}{\partial \delta}, \qquad \dot{\psi} = \frac{m}{2} + \dot{\delta}, \qquad \ddot{\psi} = \ddot{\delta},$$

$$U = \frac{3}{4} \frac{\omega_0^2}{(1-e^2)^3} (1 + e\cos\nu)^3 (A - C) \cos(m\tau - 2\nu + 2\delta).$$

Pour obtenir une solution asymptotique on doit faire la moyenne de U suivant τ et porter la valeur obtenue dans (6.11.1). Or, si m prend une valeur non entière, le résultat de la mise en moyenne sera nécessairement nul : la rotation du satellite sans résonance ne diffère pas d'une rotation uniforme. Si m prend une valeur entière, U est une fonction périodique de ν, auquel cas

$$\overline{U} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U \frac{d\tau}{d\nu}\, d\nu.$$

La mise en moyenne donne alors comme résultat

$$\left.\begin{aligned} \overline{U} &= \frac{3}{4} \omega_0^2 (A - C)\, \Phi_m(e) \cos 2\delta, \\ \Phi_m(e) &= \frac{1}{\pi (1-e^2)^{3/2}} \int_0^{\pi} (1 + e\cos\nu)\, [m\tau(\nu) - 2\nu]\, d\nu. \end{aligned}\right\} \quad (6.11.5)$$

où $\tau(\nu)$ se calcule suivant la formule (6.8.2), et l'équation du mouvement (6.11.2) se transforme en

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} + \frac{3}{2} \frac{A - C}{A} \Phi_m(e) \sin 2\delta = 0. \qquad (6.11.6)$$

On montre que l'équation (6.11.6) reste vraie pour un satellite triaxial, quitte à remplacer au dénominateur le moment d'inertie A par le troixième moment d'inertie B. L'équation (6.11.6) est très importante ; nous allons décrire ses principales propriétés et les résultats qui en découlent.

1° Cette équation est analogue à celle des oscillations d'un pendule composé.

2° Elle est intégrable. Son intégrale première — intégrale de la demi-force vive — s'écrit

$$\frac{1}{2} A\dot{\delta}^2 + \frac{3}{2} \Phi_m(e)(A - C) \sin^2\delta = h_0. \qquad (6.11.7)$$

Cette formule permet de construire dans le plan δ, $\dot{\delta}$ un diagramme dit *portrait de phase* des trajectoires, c'est-à-dire les courbes de variation de $\dot{\delta}(\delta, h_0)$ pour diverses valeurs fixées de h_0. On voit un tel portrait sur la figure 6.14 ; il représente le cas où $\Phi_m(e)(A - C) > 0$.

3° D'après la signification géométrique de l'angle δ, si $\delta = 0$ ou $\delta = \pi$ lorsque le satellite passe au périgée, l'axe de son moment d'inertie C est orienté parallèlement au rayon vecteur du périgée. En regardant le portrait de phase, on conçoit que pour $\Phi_m > 0$ le régime de rotation est stable si le satellite au périgée est allongé suivant le rayon vecteur ($A > C$), et pour $\Phi_m < 0$, s'il est allongé parallèlement au vecteur vitesse ($A < C$).

4° Le plan de phases δ, $\dot{\delta}$ a un domaine de « mouvement rotatif » dans lequel l'angle δ croît ou décroît de façon monotone en fonction

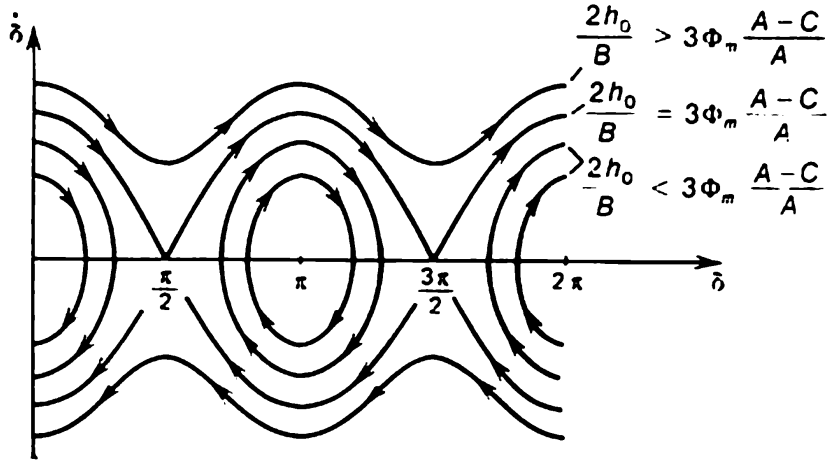


Fig. 6.14. Portrait de phase

du temps, et un domaine de « mouvement oscillatoire » où l'angle δ oscille. Ce dernier domaine sera appelé *zone de résonance*. Sa largeur est

$$|\dot{\delta}|_{\max} = \sqrt{3\,\frac{A-C}{A}\,\Phi_m(e)}\,.$$

5° Dans la zone de résonance toute oscillation $\delta(\tau)$ se laisse décrire en termes de fonctions elliptiques de module

$$k^2 = \sin^2\delta_0 + \frac{A\dot{\delta}_0^2}{3(A-C)\,\Phi_m(e)} \leqslant 1,$$

de sorte que

$$\sin\delta = k\,\mathrm{sn}\left[\sqrt{3\,\frac{A-C}{A}\,\Phi_m(e)}\,(\tau-\tau_0) + F_0,\ k\right],$$

$$\max|\sin\delta| = k.$$

Cette oscillation a comme période sans dimension

$$T = \frac{4K(k)}{\sqrt{3\,\frac{A-C}{A}\,\Phi_m(e)}},$$

où $K(k)$ est une intégrale elliptique totale de première espèce.

6° La fréquence des petites oscillations autour de la position stable est

$$\omega_\delta = \sqrt{3\,\frac{A-C}{A}\,\Phi_m(e)}\,.$$

Remarquons maintenant que si l'orbite est circulaire ($e = 0$), on a $\Phi_m \equiv 0$ pour m quelconque, sauf $m = 2$. Dans ce dernier cas la période de rotation propre est exactement égale à la période de révolution. Nous savons déjà que c'est le cas de la Lune.

Le seul mouvement stable admettant des résonances en orbite circulaire est un mouvement du type lunaire. Il est curieux que pour

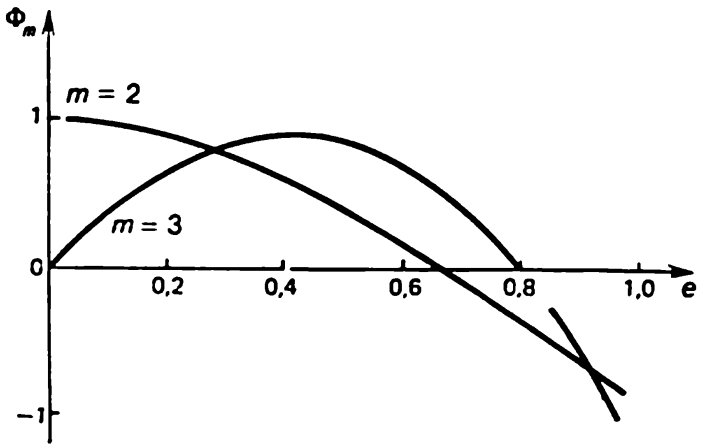


Fig. 6.15. Courbes des fonctions $\Phi_2(e)$ et $\Phi_3(e)$

$e = 0$ on a $\Phi_2(0) = 1$, l'équation (6.11.6) devenant une équation *exacte* des oscillations planes du satellite autour de sa position d'équilibre relatif. Dans ce cas, l'équation (6.11.6) peut être déduite de façon rigoureuse, sans passer à la moyenne. L'angle δ est alors compté entre l'axe d'inertie du satellite et le rayon vecteur du point représentatif actuel de son centre de masse. Nous voyons qu'un mouvement du type lunaire ($m = 2$) peut aussi avoir lieu en orbite elliptique. Il existe en outre en orbite elliptique une infinité de mouvements stables avec résonances qui répondent à des valeurs entières différentes de m. De tous les mouvements possibles avec résonances, ce sont le mouvement du type lunaire ($m = 2$) et le mouvement du type mercurial ($m = 3$) qui nous préoccupent. La figure 6.15 montre les courbes des fonctions $\Phi_2(e)$ et $\Phi_3(e)$ [6.22, 6.23]. Pour des petites valeurs de e on a

$$\Phi_2(e) = 1 - 5\,\frac{e^2}{2} + 3\,\frac{e^4}{16} - \ldots,$$

$$\Phi_3(e) = 7\,\frac{e}{2} - 123\,\frac{e^3}{16} + \ldots$$

[6.2, 6.22]. Pour $m > 3$ les résonances deviennent de moins en moins importantes (du moins, tant que l'excentricité reste faible) à mesure que m croît, car $\Phi_m(e) \sim e^{m-2}$.

Une rotation stable du type lunaire est illustrée sur la figure 6.16. Si l'excentricité est faible, le satellite au périgée a son axe longitudinal parallèle au rayon vecteur. Or, si $e > 0{,}682$, un satellite en rotation stable « s'allonge » au périgée le long du vecteur vitesse. Quant à Mercure, nous avons déjà mentionné son mouvement avec résonances dans le quatrième essai. La vitesse angulaire de sa rotation propre est exactement 1,5 fois celle de sa vitesse angulaire de

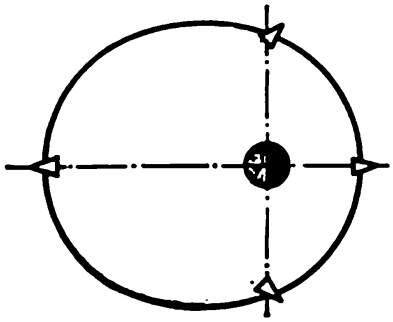


Fig. 6.16. Rotation du type lunaire ($m = 2$)

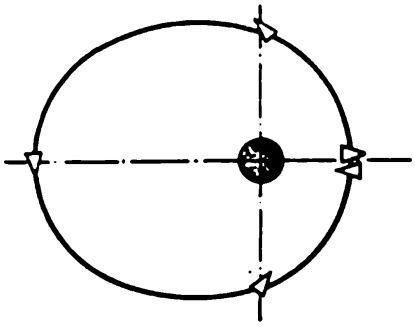


Fig. 6.17. Rotation du type mercurial ($m = 3$)

révolution ($\Omega = 3/2$). Mercure a une orbite assez excentrique: $e = 0{,}206$. Pour une telle orbite $\Phi_3(e) \approx 0{,}7$, alors que $\Phi_1(e) \approx 0{,}9$. Cela signifie que la zone de résonance pour $m = 3$ ($\Omega = 3/2$) a sensiblement la même largeur que pour $m = 2$ ($\Omega = 1$). Au cours de son évolution les forces des marées ont ralenti la vitesse angulaire de Mercure, si bien qu'il avait toutes les chances de « tomber » en résonance pour $m = 3$ avant d'atteindre la résonance à une vitesse angulaire encore plus petite ($m = 2$); c'est ce qui s'est produit effectivement *). Une rotation du type mercurial est illustrée sur la figure 6.17. Au péricentre le satellite est toujours allongé suivant le rayon vecteur (il tourne tantôt sa « proue », tantôt sa « poupe » vers le centre d'attraction), tandis qu'à l'apocentre il s'allonge parallèlement au vecteur vitesse (et vole tantôt la «proue », tantôt la « poupe » en avant).

Nous venons d'examiner brièvement les rotations planes avec résonances dans le champ gravitationnel. En réalité, les mouvements avec résonances sont beaucoup plus compliqués, car les corps célestes tournent en trois dimensions. Par exemple, le vecteur momen cinétique du mouvement de rotation de Mercure fait probablement

*) Il est extrêmement curieux que les forces des marées n'aient pas permis à Mercure de « tomber » en résonance pour $m > 3$ sans seulement « remuer le petit doigt » pour $m = 3$ [6.2] !

un angle d'environ 25° sur la normale au plan de l'orbite [6.2, 6.27]. La zone de résonance se rétrécit donc en comparaison avec celle que nous venons de définir pour le cas plan. A. Torjevski [6.24, a, b] et A. Markéev [6.25] ont effectué une importante série de recherches relatives aux rotations des satellites en résonance.

Nous pouvons donc conclure que l'existence des rotations stables des corps célestes en résonance n'est pas un fait du hasard mais découle de la nature même des forces de gravité.

12. Schiaparelli et compagnie

Il est inutile de souligner que l'étude des rotations avec résonances joue un grand rôle en théorie du mouvement des corps célestes naturels et artificiels. Un exemple classique de résonance 1/1 (la période de rotation propre égale à la période de révolution) nous est donné avec la rotation de la Lune; or, cette même résonance s'avère extrêmement importante pour la stabilisation gravitationnelle des satellites artificiels. Quant à la résonance 3/2, elle n'a jamais été utilisée (ni observée) sur les satellites artificiels, mais la découverte d'une telle résonance dans le mouvement de Mercure est si instructive que nous croyons utile de nous arrêter en quelques lignes sur l'historique de cette découverte *).

Pendant toute une époque on a cru que la rotation propre de Mercure est en synchronisme avec sa révolution, c'est-à-dire que Mercure tourne en résonance 1/1, à la façon de la Lune. S'il en est ainsi, Mercure doit présenter au Soleil à peu près toujours la même face. Telle est, du moins, la conclusion tirée en 1889 par Schiaparelli, illustre astronome italien **), de ses nombreuses observations de Mercure. On sait que Mercure fait une révolution complète autour du Soleil en 88 jours. Après avoir analysé ses observations, Schiaparelli a conclu que Mercure fait un tour complet sur lui-même en 88 jours tout aussi bien. Pendant presque cent ans, jusqu'à 1965, les observations des différents astronomes semblaient corroborer le résultat de Schiaparelli.

Avec le développement de la technique, y compris les techniques spatiales, il est devenu possible d'organiser une observation foncièrement nouvelle des planètes: la radiodétection. En 1965, une série d'observations de Mercure effectuées par radar ont permis aux chercheurs américains G. G. Pettengill, R. B. Dyce et I. I. Schapiro [6.27, 6.28] de découvrir que la période de rotation propre de Mercure est de 59 ± 3 jours et non de 88. Le chercheur italien G. Colombo (qui a longtemps travaillé aux U.S.A) a remarqué que la période

*) Voir la littérature, par exemple dans [6.2, 6.26].

**) Il doit sa renommée à la découverte des « canaux martiens » (réseau de lignes sombres) en 1877, lors de la grande opposition de Mars.

de rotation de Mercure déduite des observations radar constitue sensiblement 2/3 de la période de révolution de cette planète ($\frac{2}{3} \times 88 = 58{,}65$ jours) et a émis pour la première fois l'idée que Mercure tourne en résonance, sa vitesse angulaire de rotation étant en rapport 3/2 avec sa vitesse angulaire de révolution. Naturellement, les données de Schiaparelli et de ses disciples ont dû alors être remises en question. Il fut montré que les observations optiques ont une marge d'interprétation assez large et qu'une période de rotation d'environ 59 jours s'inscrit parfaitement dans ces observations!

Ainsi donc, Schiaparelli risque de figurer désormais dans l'histoire des sciences sous les traits un peu tristes d'un chercheur qui a commis deux erreurs notoires dans l'interprétation de ses propres observations. *Primo*, c'est la découverte de la rotation synchrone de Mercure, qui est inexistante; *secundo*, c'est la découverte des canaux sur Mars, qui n'existent vraisemblablement pas, eux non plus *).

En faisant l'historique de la découverte de la période de rotation de Mercure, on ne peut pas passer sous silence les circonstances dans lesquelles on a découvert la période de rotation de Vénus. L'épaisse atmosphère de Vénus ne permet de mesurer, par les moyens optiques, que la période de rotation des hautes couches de l'atmosphère. On a constaté que l'atmosphère vénusienne tourne en sens inverse, ce qui a permis de présager (à juste raison, comme on le verra plus tard) que la planète elle-même tourne aussi en sens inverse.

En ce qui concerne la période de rotation de Vénus elle-même, les siècles passés n'ont apporté rien qui puisse rassasier la saine curiosité des nombreux scientifiques **).

La situation change en 1962, après que des observations radar sont réalisées en Union Soviétique (équipe de V. Kotelnikov [6.31, 6.26]) et aux Etats-Unis (R. L. Carpenter et R. L. Goldstein [6.32, 6.33]). Elles montrent que Vénus tourne sur elle-même dans le sens inverse de sa rotation orbitale et avec une période d'environ 250 jours. Son axe est incliné à 1° 2 par rapport à la normale au plan de l'orbite.

Un peu plus tard la période de rotation est précisée et trouvée égale à $243{,}24 \pm 0{,}03$ jours, valeur qui se confond à l'erreur de mesure près avec la valeur de 243,16 jours pour laquelle Vénus montre la

*) Les photographies de la surface martienne rapportées par les sondes spatiales américaines *Mariner 4* (juillet 1965), *Mariner 6* (juillet 1969) et *Mariner 7* (août 1969) frappent par leur ressemblance à la surface lunaire. Des zones entières sur Mars sont couvertes d'un réseau de cratères qui rappellent ceux de la Lune. Du moins, quelques-uns des fameux « canaux » ont pu être identifiés à des chaînes de cratères [6.30].

**) L'auteur de ce livre dispose de preuves matérielles qui montrent que sa curiosité à lui ne date pas d'hier: encore en 1948, étant écolier, il a fait paraître une lettre dans la revue *Fizika v chkole*, lettre dans laquelle il donnait une justification « théorique » de la période de rotation présumée de Vénus fondée sur la théorie cosmogonique d'Otto Schmidt qui venait d'être publiée.

même face à la Terre à chaque conjonction inférieure *). Ce sont probablement P. Goldreich et S. J. Peale qui l'ont compris les premiers [6.2]. Ainsi donc, la rotation de Vénus est accompagnée par une résonance absolument extraordinaire, qui couvre non seulement la révolution de Vénus autour du Soleil mais aussi celle de la Terre. Pendant la période qui sépare deux conjonctions inférieures consécutives (583,92 jours) Vénus aura fait cinq tours complets (en sens inverse!) dans son système de coordonnées orbitales et quatre tours complets dans le système de coordonnées orbitales de la Terre.

13. Rotation en résonance des corps célestes et lois de Cassini généralisées **)

Les résultats exposés précédemment permettent de conclure que la tendance au synchronisme des rotations est une loi objective de la nature.

Les systèmes de stabilisation passive des satellites artificiels ne font que profiter de cette tendance.

La rotation en résonance des corps célestes est l'objet de théories spéciales. Ces théories confirment que le synchronisme des rotations est effectivement un phénomène intrinsèque de la nature. La théorie a permis de démontrer le bien-fondé des lois de rotation de la Lune établies empiriquement, dites *lois de Cassini*, et de déduire les lois de Cassini généralisées qui sont applicables par exemple à la rotation de Mercure.

Les lois de Cassini généralisées font état d'un synchronisme double très délicat (double résonance): premièrement, c'est le synchronisme entre la rotation propre d'un corps céleste et sa révolution et, deuxièmement, c'est le synchronisme entre le mouvement de l'axe de rotation du corps et la précession perturbée de son orbite.

La Lune est en double synchronisme 1/1 + 1/1, et Mercure en double synchronisme 3/2 + 1/1.

Le double synchronisme décrit par les lois de Cassini généralisées est un moyen efficace de stabilisation passive des satellites; il peut assurer par exemple une double stabilisation en orbite des stations orbitales. L'auteur se propose de donner, dans les pages qui suivront, un bref aperçu de la théorie de la rotation en résonance des corps célestes qui a constitué la justification théorique des « lois de Cassini généralisées »; en attendant, il ne peut pas résister à la tentation de décrire en quelques lignes le personnage fascinant de Jean Dominique Cassini.

---

*) A la conjonction inférieure le Soleil, Vénus et la Terre se trouvent disposés sur une même ligne droite; Vénus et la Terre sont du même côté du Soleil.

**) Dans les nos 13 et 16 du présent essai nous reprenons dans ses grandes lignes le texte de notre rapport de synthèse présenté au symposium de São Paulo [6.35] sur la dynamique des satellites (Brésil, 1974).

Jean Dominique (Giovanni Domenico) Cassini (8.VI. 1625, Perinaldo, — 14.IX.1712, Paris), d'origine italienne, fut membre de l'Académie des sciences de Paris, premier directeur et fondateur d'une dynastie de directeurs de l'Observatoire de Paris. Les membres de la dynastie vécurent longtemps (Jean Dominique, 87 ans; son fils Jacques, 79 ans; son petit-fils César François Cassini de Thury, 70 ans; son arrière-petit-fils Dominique, dernier directeur de la dynastie, 97 ans), travaillèrent beaucoup et léguèrent à la postérité une énorme quantité d'ouvrages, de découvertes... et d'erreurs.

On se perd dans l'océan des textes signés Cassini. (Il y eut d'ailleurs dans la dynastie un Cassini botaniste, mais qui faisait aussi de l'astronomie.) Cela fait que tous les textes ne sont pas pour ainsi dire attribués au bon Cassini. Les découvertes de Jean Dominique furent parfois portées au crédit de Jacques, et les erreurs de Jacques imputées à Jean Dominique. Un autre exemple: on rencontre souvent dans la littérature des affirmations selon lesquelles Jacques Cassini était fermement persuadé que la Terre est allongée (et non aplatie aux pôles). D'autres auteurs attribuent cette erreur à Jean Dominique.

C'est indéniablement le fondateur de la dynastie qui est le personnage le plus remarquable de toute la pléiade. Il eut probablement un vif tempérament italien de polémiste. Né après la découverte des lois du mouvement des planètes par Kepler, Jean Dominique Cassini crut néanmoins de son devoir d'avancer ses propres idées sur les trajectoires des corps célestes. Il imagina des courbes sophistiquées du quatrième ordre, connues en mathématiques sous le nom d'*ellipses de Cassini* ou de *cassinoïdes*. Ses ellipses perpétrèrent son nom, mais — hélas!— sans aucun rapport avec le problème qui intriguait l'inventeur. Contemporain de Newton, il ne croyait ni à la loi de l'attraction newtonienne, ni même, selon certaines rumeurs — *horribile dictu*!— à la théorie de Copernic.

Ce ne sont pourtant pas ces jugements erronés qui firent la renommée de J. D. Cassini. Il fut un excellent observateur, et les résultats de ses observations ne cessent de tourmenter les théoriciens depuis trois siècles. Il découvrit un vide séparant les anneaux de Saturne (« division de Cassini »). On commence à comprendre aujourd'hui que ce vide est un effet des résonances. Il découvrit les lois fondamentales de rotation de la Lune (« lois de Cassini »); trois cents ans plus tard, on montrera que ces lois sont intimement liées au phénomène de la résonance. Les satellites saturniens: Rhéa, Téthys, Dioné, Japet, furent identifiés par Cassini. De nos jours, on a montré que la rotation de ces satellites est un exemple de l'action des résonances. Directement ou indirectement, le nom de Cassini se trouve donc toujours associé au problème le plus brûlant de la mécanique céleste contemporaine: la résonance.

Grand savant de son temps, J. D. Cassini eut beaucoup de disciples et fonda non seulement une dynastie directoriale mais toute une école de mathématiciens et d'astronomes. Par exemple, quatre Français, anciens élèves de Cassini, furent envoyés plus tard (en 1685) par Louis XIV comme missionnaires en Chine, restèrent auprès de l'empereur Kang-Hi de la dynastie Tsin et le firent profiter de leurs services et conseils éclairés. Un de ces quatre mathématiciens du Roi et élèves de J. D. Cassini, François Gerbillon, participa aux négociations de Nertchinsk avec la mission diplomatique russe de F. Golovine, à titre de conseiller et interprète du côté chinois, et contribua activement à la signature de l'Accord de Nertchinsk, en 1689.

Je suis attiré par la personnalité de Jean Dominique Cassini, ce personnage bizarre et contradictoire, resté dans l'histoire de la science avec ses erreurs subjectives et son rôle scientifique objectivement progressiste. La biographie de Cassini est mal connue. Et c'est dommage, car il vécut à une époque fort intéressante, fut invité par Louis XIV à Paris et très probablement fit fureur à la cour du Roi-Soleil. Une des obligations de l'astronome du Roi était, soit dit en passant, de faire le « recyclage scientifique » des courtisans. Les belles dames trouvaient du piquant à faire des visites à l'Observatoire de Paris pour y admirer le ciel étoilé: « Oh, quelle nuit délicieuse j'ai passé avec monsieur Cassini... »

Revenons cependant à notre théorie. Pour être efficace, la théorie des rotations en résonance des corps célestes doit révéler et mettre à profit

a) le facteur stabilisateur qui maintient le corps céleste en régime de résonance d'une façon stable;

b) le facteur dissipatif qui détermine la mise en résonance d'un corps animé initialement d'un mouvement de rotation quelconque.

Le facteur stabilisateur est constitué par les moments gravitationnels exercés sur le corps par d'autres corps célestes. Comme facteur dissipatif, on envisage les phénomènes des marées dans le système solaire et d'autres forces dissipatives possibles.

Nous allons décrire successivement le raisonnement qui a conduit à la construction de la théorie de la rotation avec résonances des corps célestes. Ce raisonnement sera appliqué au cas le plus connu et étudié, à savoir la rotation de la Lune.

En 1693, Cassini établit les lois suivantes de la rotation de la Lune [6.36, 6.37]:

1° La Lune tourne uniformément autour d'un axe immobile se trouvant dans son corps, avec une période qui coïncide avec celle de la révolution de la Lune autour de la Terre.

2° Le plan de l'équateur lunaire garde une inclinaison constante, égale à 1°32′,1, sur l'écliptique.

3° Le nœud ascendant de l'équateur lunaire sur l'écliptique coïncide toujours avec le nœud descendant de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Il faut dire que ces lois ne cessent d'étonner. En vertu de la troisième loi de Cassini, les trois plans — ceux de l'écliptique, de l'équateur lunaire et de l'orbite lunaire — viennent se couper toujours suivant une même droite. Cela est d'autant plus étonnant que deux plans sont mobiles!

On voit sur la figure 6.18 un schéma illustrant les lois de Cassini. Puisque l'orbite de la Lune est inclinée à $i \approx 5°09'$ sur l'écliptique, il ressort de la deuxième et de la troisième loi de Cassini que le vecteur vitesse angulaire axiale ω de la Lune est normal à la ligne des nœuds et fait un angle $\rho \approx 6°41'$ avec la normale $\mathbf{n}$ au plan de l'orbite lunaire.

Depuis Lagrange et Laplace, les lois de Cassini ont toujours constitué l'ossature de la théorie de la libration lunaire [6.38, 6.39]: on a étudié des équations linéarisées du mouvement susceptibles de donner une solution proche du mouvement cassinien. La théorie linéaire classique utilise un résultat empirique: la petitesse de l'angle entre l'axe de rotation de la Lune et l'axe de l'écliptique, ainsi que la petitesse de l'inclinaison de l'orbite lunaire sur l'écliptique.

Développant les idées classiques, Ch. Khabibouline a proposé sa théorie quasi linéaire de la libration lunaire ([6.40] et autres

travaux; voir aussi un exposé de cette théorie dans [6.41]). Cette théorie explique certains effets peu évidents relatifs aux oscillations non linéaires de la Lune par rapport à son centre de masse. C'est pourtant un autre aspect du problème qui nous préoccupe maintenant : nous ne nous intéressons pas tellement aux écarts de la Lune par rapport au « mouvement cassinien » mais plutôt à la déduction des lois de Cassini elles-mêmes (et de leurs généralisations possibles en tant que lois de la nature) à partir des équations du mouvement.

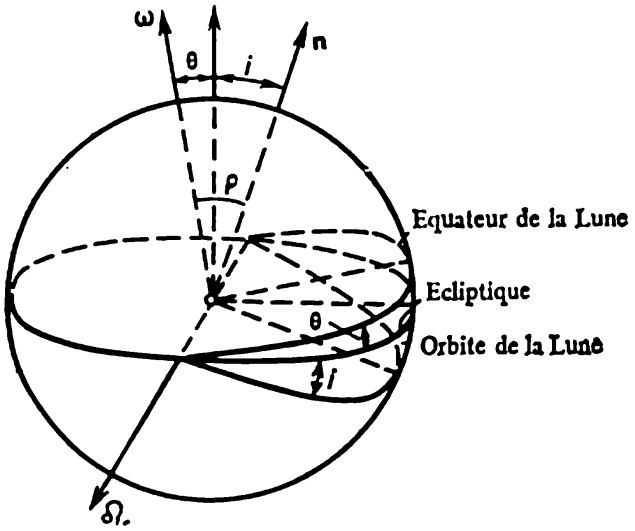


Fig. 6.18. Illustration des lois de Cassini

Les lois de Cassini, éminemment empiriques, ne sont pas conformes aux équations exactes du mouvement et, de ce fait, n'ont pu être déduites à partir des équations non linéaires exactes du mouvement.

Le fait même que le mouvement « cassinien » existe dans la nature est un argument en faveur de la stabilité (dans un sens à préciser) de ce mouvement. Il existe probablement des équations non linéaires approchées, mais assez semblables aux équations exactes, pour lesquelles les mouvements « cassiniens » stables sont des mouvements stationnaires. De telles équations sont proposées et analysées dans les travaux de V. Béletski [6.14, 6.42]. M. Lidov et A. Neichtadt ont entrepris une étude indépendante en cette matière dans leur travail commun [6.43]. Ce problème a été évoqué antérieurement en partie par G. Colombo [6.44] et S. J. Peale [6.45].

Certaines études plus récentes du mouvement des corps dans le champ gravitationnel [6.1, 6.4, 6.16, 6.17, 6.19, 6.20, 6.22, 6.24, b] ont permis de construire des équations non linéaires qui possèdent les propriétés requises.

Ce sont des équations de la première approximation au sens des méthodes asymptotiques de la mécanique non linéaire (méthode de

la moyenne). Elles ont été construites sans négliger aucun des facteurs essentiels qui déterminent la rotation de la Lune : la rotation dans l'espace du plan de l'orbite lunaire (mouvement séculaire du nœud de l'orbite lunaire provoqué par les perturbations de la part du Soleil), l'influence des moments gravitationnels terrestres, les résonances causées par le synchronisme de la rotation et de la révolution. L'emploi des méthodes asymptotiques est justifié par la petitesse des moments gravitationnels (l'ellipsoïde d'inertie de la Lune a une forme sensiblement sphérique). Les mêmes facteurs sont pris en considération — *mutatis mutandis* — dans le cas de Mercure.

Un modèle non linéaire sensiblement conforme aux lois de Cassini est donné par l'équilibre relatif stable d'un corps en orbite circulaire non perturbée (fixe dans l'espace) que nous avons décrite dans les nos 2 à 4 du présent essai (voir fig. 6.3).

L'équilibre relatif n'est autre qu'un synchronisme en rapport 1/1 de la rotation propre et de la révolution du corps.

En équilibre relatif le corps oriente d'une manière stable un de ses axes vers le centre d'attraction. Ce fait est utilisé largement dans les systèmes de stabilisation passive par gravitation des satellites artificiels de la Terre. Le satellite en orbite est stabilisé de telle façon que l'une de ses faces soit tournée constamment vers la Terre, « de la même manière que la Lune » dit-on souvent. Cette dernière remarque n'est pas tout à fait conforme à la réalité. Il est vrai que l'équilibre relatif vérifie la première loi de Cassini. Par contre, les deux autres lois de Cassini ne sont pas vérifiées.

La deuxième et la troisième loi de Cassini tiennent compte de l'évolution de l'orbite lunaire perturbée par des forces extérieures, principalement par l'attraction du Soleil, et plus exactement de l'effet de rotation du plan de l'orbite lunaire. L'effet en question consiste dans la précession de la normale au plan de l'orbite lunaire autour de la normale à l'écliptique avec la vitesse angulaire [6.36] $K_{☊} = 1934°08'31''$ en 36 525 jours éphémérides (100 ans). (La période du mouvement du nœud est donc 18,6 ans environ.) La deuxième et la troisième loi de Cassini signifient que, dans ce mouvement, l'axe de rotation de la Lune, la normale à l'écliptique et la normale à l'orbite lunaire se trouvent toujours dans un même plan sans se confondre (fig. 6.18). C'est là la différence entre les lois de Cassini et la « loi de l'équilibre relatif ». Aux termes de cette dernière l'axe de rotation de la Lune se confond avec la normale au plan de son orbite. En réalité l'écart angulaire de l'axe de la Lune par rapport à la normale au plan de son orbite est non négligeable : elle est égale à 6°41'.

D'après la deuxième et la troisième loi de Cassini, le plan contenant l'axe de rotation de la Lune et la normale à l'orbite lunaire est toujours normal à la ligne des nœuds, c'est-à-dire qu'il tourne

avec la vitesse angulaire K_{Ω} autour de la normale à l'écliptique. De cette façon l'axe lunaire est « asservi » au mouvement de la normale à l'orbite lunaire.

Autrement dit, on est en présence d'un nouveau synchronisme 1/1 entre la période du mouvement (précession) de l'axe lunaire dans l'espace et la période de la précession de l'orbite lunaire.

Un tel mouvement de l'axe lunaire peut être assimilé à son immobilité dans un système de coordonnées qui tournerait avec la vitesse angulaire K_L autour de la normale à l'écliptique.

V. Béletski a analysé en 1958-1965 [6.16, 6.19, 6.1] les mouvements rapides d'un satellite sous l'action des moments gravitationnels, compte tenu de l'évolution de son orbite due aux perturbations extérieures. Ces mouvements ont été analysés en déduisant et en discutant des équations d'évolution suffisamment voisines des équations exactes et susceptibles de brosser un tableau qualitatif et quantitatif assez fidèle du mouvement réel. Le résultat de cette analyse a été brièvement exposé dans le n° 10 du présent essai. Il a été montré que le satellite est animé d'un mouvement non perturbé autour du vecteur moment cinétique qui, constant en module, se déplace lentement dans l'espace. L'extrémité du vecteur moment cinétique décrit une courbe fermée dans le système de coordonnées tournant dont un axe est colinéaire à la ligne des nœuds de l'orbite du satellite, et un autre axe — celui de la rotation — se confond avec la normale au plan de l'orbite. On voit sur la figure 6.12 l'allure des courbes suivies par l'extrémité du vecteur moment cinétique *).

Je tiens à souligner que le caractère fermé des courbes suivies par l'extrémité du vecteur moment cinétique dans le système de coordonnées qui tourne avec l'orbite manifeste une tendance à la mise en synchronisme des rotations de l'orbite et du vecteur moment cinétique. Dans les travaux [6.16, 6.19, 6.1] ce résultat est rattaché non seulement aux effets gravitationnels mais aussi magnétiques et aérodynamiques.

Un cas particulier du mouvement décrit est la rotation axiale du solide autour de l'axe d'inertie central principal qui se confond avec la direction vers le point singulier *3* de la figure 6.12, *b* ou vers un autre point stationnaire quelconque. L'allure des courbes suivies par l'extrémité du vecteur moment cinétique au voisinage de cette direction (fig. 6.12, *b*) montre clairement que ce mouvement

*) Dans [6.16, 6.19, 6.1] nous avions considéré un solide dynamiquement symétrique. Cependant les résultats obtenus se laissent généraliser sans peine à un solide triaxial, grâce à la contribution de F. Tchernoussko [6.17]. Dans cet article, datant de 1963, l'auteur s'applique à analyser les rotations rapides d'un satellite triaxial dans le champ gravitationnel, sans tenir compte de l'évolution de l'orbite. Dans les travaux postérieurs de certains auteurs américains [6.44, 6.46 à 6.48] sont redécouverts les effets démontrés dans [6.16, 6.17, 6.19, 6.1].

particulier est stable, au sens de la stabilité de l'axe considéré. Il y a mieux: ce mouvement particulier *vérifie au sens généralisé la deuxième et la troisième loi de Cassini*; G. Colombo l'a fait remarquer en 1966 [6.44]. Dans ce même travail G. Colombo a avancé et justifié l'idée que les lois de Cassini généralisées peuvent s'appliquer à d'autres corps célestes que la Lune, tels que Mercure ou Japet.

Or, c'est la méthode même de l'analyse qui fait que le mouvement décrit dans [6.16, 6.19, 6.1] ne vérifie pas la première loi de Cassini. En construisant les équations d'évolution, on a supposé l'existence d'un petit paramètre, à savoir du rapport de la vitesse angulaire de révolution à la vitesse angulaire de la rotation propre du corps. La seconde est donc par hypothèse très supérieure à la première et ne peut jamais être égale à l'autre, ce qui contredit la première loi de Cassini.

On peut cependant introduire le petit paramètre d'une façon différente. Profitons du fait que l'ellipsoïde d'inertie de la Lune est proche d'une sphère, c'est-à-dire que les moments d'inertie de la Lune ne diffèrent pas beaucoup entre eux. C'est F. Tchernoussko qui, en 1963, a écrit et analysé les équations d'évolution correspondantes, sans tenir compte de l'évolution de l'orbite [6.17]. Les équations indiquées restent valables pour toute vitesse angulaire de rotation du satellite (à condition qu'il n'y ait pas de résonance), y compris des vitesses voisines de sa vitesse angulaire de révolution. Ajoutant à ces équations les effets de l'évolution de l'orbite décrits dans [6.16, 6.19, 6.1], on retrouve la même propriété du mouvement qu'auparavant. A savoir: le satellite est animé d'un mouvement (presque) non perturbé autour de son vecteur moment cinétique, tandis que ce dernier, constant en module, décrit dans l'espace des trajectoires illustrées sur la figure 6.12. Dans un cas particulier, le vecteur moment cinétique se confond avec un axe d'inertie central principal du satellite et — par la même occasion — avec la direction vers un point stationnaire (voir fig. 6.12), la vitesse angulaire de la rotation propre du satellite étant très exactement égale à sa vitesse angulaire de révolution. Un tel mouvement satisfait formellement toutes les trois lois de Cassini.

Or, le cas particulier du mouvement que nous venons de décrire a un caractère formel, car il ne remplit pas la condition de non-résonance admise par hypothèse. Stable au sens de la deuxième et de la troisième loi de Cassini, ce mouvement est instable vis-à-vis de la première: toute variation de la vitesse angulaire de la rotation propre est conservée, si bien que la Lune pourrait enfin montrer à la Terre — dans un avenir éloigné peut-être — sa face cachée . . .

La première loi de Cassini dit que le mouvement de la Lune est accompagné d'une *résonance*: les vitesses angulaires de la rotation propre et de la révolution de la Lune sont entre elles dans le rapport 1/1. Les mouvements qui présentent des résonances ou qui se produi-

sent au voisinage d'une résonance ont certains traits spécifiques; les équations d'évolution définissant des mouvements pareils sont plus difficiles à établir qu'en l'absence de toute résonance. Dans les constructions décrites jusque-là, les résonances n'ont pas été prises en considération.

Dans son travail de 1963 [6.22] exposé dans le n° 11 du présent essai, F. Tchernoussko déduit et analyse une équation fort utile qui décrit les rotations planes avec résonances des corps célestes naturels et artificiels dont l'ellipsoïde d'inertie est proche d'une sphère. Plus tard, en 1968-1969, A. Torjevski analysera les mouvements tridimensionnels avec résonances d'un satellite dans le champ gravitationnel [6.24], sans tenir compte de l'évolution de l'orbite. Ces deux auteurs montrent que le mouvement perturbé n'est pas aussi simple que dans le cas de non-résonance. Il existe cependant des mouvements stationnaires où le satellite tourne autour d'un axe d'inertie central principal (le vecteur moment cinétique, constant en module, se confond avec cet axe), tandis que le mouvement du vecteur moment cinétique par rapport à l'orbite immobile (sans évolution) est analogue au mouvement qu'il effectue par rapport à une telle orbite dans les cas de non-résonance. De plus, un tel mouvement est stable (sous certaines conditions) vis-à-vis des perturbations de la rotation propre: c'est cette propriété qui manquait dans les constructions précédentes sans résonance. Parmi les mouvements stationnaires stables analysés par A. Torjevski, on trouve un cas qui convient parfaitement à notre analyse: il s'agit d'une résonance 1/1 entre fréquences orbitale et axiale pour un solide dont tous les moments d'inertie sont sensiblement les mêmes.

En faisant la synthèse des constructions mentionnées [6.1, 6.15 à 6.17, 6.19, 6.22, 6.24], on aboutit naturellement à des « mouvements cassiniens » stables (au sens des équations d'évolution) vis-à-vis des trois lois de Cassini. A la limite, quand la vitesse de la précession de l'orbite tend vers zéro, on obtient un équilibre relatif sous les conditions de stabilité énumérées dans [6.4], ainsi que dans [6.1].

Remarquons, en outre, que pour l'orbite lunaire la dérive du périgée est notablement plus grande que celle du nœud. Le périgée tourne avec la vitesse angulaire $K_\omega = 4069°02'03''$ en 36 525 jours éphémérides (donc avec une période d'environ 8,85 ans). Conformément aux résultats de S. Trouchine publiés en 1970 [6.20], on peut croire que la dérive du périgée ne compromet pas le caractère stationnaire du mouvement, au moins dans les termes dominants du potentiel perturbateur.

Les idées exposées ont été réalisées dans les travaux de l'auteur [6.14] et [6.42].

Epargnant au lecteur les méandres de l'appareil formel, nous citerons seulement quelques résultats de l'étude effectuée dans [6.14] et [6.42]. S'il désire connaître les détails, le lecteur peut con-

sulter les publications [6.49, 6.50] ou notre livre plus récent [6.51].

En fonction des valeurs prises par les paramètres, les équations d'évolution (mises en moyenne) du mouvement établies dans [6.14] et [6.42] admettent soit deux, soit quatre types de mouvements stationnaires. En chacun de ces mouvements le nœud ascendant de l'orbite se confond soit avec le nœud ascendant, soit avec le nœud descendant de l'équateur du satellite, suivant les valeurs des paramètres. Tous ces mouvements peuvent être qualifiés de « cassiniens ». On distingue les mouvements directs où l'angle ρ_0 entre le vecteur moment cinétique et la normale au plan de l'orbite est proche de 0 (c'est le « mouvement cassinien » au sens propre), les mouvements rétrogrades (ρ_0 est voisin de π) et les mouvements « renversés » $\left(\rho_0 \sim \frac{\pi}{2}\right)$. En mouvement direct la rotation est de même sens que la révolution, et en mouvement rétrograde c'est le contraire.

Lois de Cassini généralisées. Soit un solide dont l'ellipsoïde triaxial d'inertie est proche d'une sphère; le centre de masse du solide se déplace avec la vitesse angulaire moyenne ω_0 par rapport au centre d'attraction suivant une orbite qui ne diffère d'une orbite képlérienne que par une précession constante de la normale au plan de l'orbite autour d'un axe de précession immobile dans l'espace et par une rotation constante du demi-grand axe de l'orbite dans son propre plan. Le centre d'attraction exerce des moments gravitationnels sur le solide.

Il existe alors, parmi les mouvements possibles du solide, des mouvements qui, en première approximation (au sens des méthodes asymptotiques de la mécanique non linéaire), vérifient les lois de Cassini généralisées suivantes [6.14, 6.42, 6.51]:

1° *Le solide tourne uniformément autour de son axe central principal. La vitesse angulaire de sa rotation est proche d'une valeur de résonance*: ω_0 (*la Lune*), $\frac{3}{2}\omega_0$ (*Mercure*) *).

2° *L'axe de la rotation angulaire du solide et la normale au plan de son orbite forment un angle constant* ρ_0. *Pour des valeurs fixées des paramètres du solide et de l'orbite, l'angle* ρ_0 *peut prendre éventuellement soit deux, soit quatre valeurs.*

3° *L'axe de la rotation propre du solide, la normale au plan de son orbite et l'axe de la précession de l'orbite sont contenus dans un même plan.*

On doit y ajouter une « loi de la phase constante »:

4° *Toutes les fois que le solide passe au péricentre de son orbite, un de ses axes d'inertie principaux normaux à l'axe de rotation propre du solide se trouve à la même distance angulaire de la ligne des nœuds que le rayon vecteur du péricentre.*

*) Il peut y avoir aussi des mouvements stationnaires présentant d'autres résonances.

Explicitons un peu toutes ces lois.

Introduisons quelques notations. Soient A, B, C les moments d'inertie centraux principaux du solide, i l'inclinaison constante de son orbite sur l'écliptique, K_{Ω} et K_{ω} respectivement les vitesses angulaires constantes du mouvement du nœud et du péricentre de l'orbite du solide déterminé par les perturbations de la part des autres corps célestes. Soit L_0 la valeur du module du vecteur moment cinétique en mouvement stationnaire. La vitesse angulaire du mouvement stationnaire, égale à L_0/B, se définit par la formule

$$\frac{L_0}{B}=\Omega+K_{\omega}+K_{\Omega}\cos(i\mp\rho_0),\qquad \Omega=\frac{m}{2}\omega_0,\quad m=2,\ 3.$$

C'est là la première loi de Cassini (précisée) : la vitesse angulaire de rotation propre est en résonance avec la vitesse angulaire de révolution, en rapport 1/1 (la Lune) ou 3/2 (Mercure) (avec un petit appoint déterminé par le mouvement du péricentre et du nœud de l'orbite).

La troisième loi de Cassini trouve une généralisation, elle aussi : les nœuds de l'orbite et de l'équateur qui se confondent peuvent être non seulement opposés mais aussi homologues.

Quant à l'angle ρ_0 qui figure dans la deuxième loi de Cassini généralisée, il se laisse définir en fonction des paramètres du mouvement. Introduisons les notations

$$\alpha=\frac{3}{8}\frac{\omega_0^2 I}{L_0 K_{\Omega}}(A-C),$$

$$\beta=\frac{3}{8}\frac{\omega_0^2}{L_0 K_{\Omega}}\{[3B-(2+I)C]+[B-(2+I)A]\},$$

$$\chi=\frac{\beta}{\sqrt{\sin^2 i+(\alpha+\cos i)^2}},$$

$$\cos\rho^*=\frac{\cos i+\alpha}{\sqrt{\sin^2 i+(\alpha+\cos i)^2}},$$

$$\sin\rho^*=\frac{\sin i}{\sqrt{\sin^2 i+(\alpha+\cos i)^2}}.$$

Ici $I=\Phi_m(e)$ ne dépend que de l'excentricité (fig. 6.15). En résonance 1/1 (cas lunaire) on a $m=2$, et en résonance 3/2 (cas mercurial) on a $m=3$. Alors ρ_0 se déduit de l'équation

$$\cos\rho^*\mp\sin\rho^*\operatorname{cotg}\rho_0+\chi\cos\rho_0=0. \qquad (6.13.1)$$

Nous avions examiné cette équation encore en 1965 [6.1], en analysant la rotation sans résonance d'un satellite artificiel compte tenu de l'évolution de son orbite et de quelques facteurs perturbateurs (gravitationnels, aérodynamiques et magnétiques). L'équation

(6.10.5) en est un cas particulier. Remarquons que l'analyse exposée dans [6.1] comporte quelques résultats qui ne seront décrits que dans des publications postérieures [6.44, 6.46 à 6.48].

Si

$$\cos^{2/3} \rho^* + \sin^{2/3} \rho^* < \chi^{2/3},$$

l'équation (6.13.1) admet quatre solutions; en particulier, si $|\chi| > 2$, l'inégalité ci-dessus est vérifiée quel que soit ρ^*.

Si

$$\cos^{2/3} \rho^* + \sin^{2/3} \rho^* > \chi^{2/3},$$

l'équation (6.13.1) admet deux solutions; en particulier, si $|\chi| < 1$, cette dernière inégalité a lieu quel que soit ρ^*.

Notons que si les $|\chi|$ sont petits ($|\chi| < 1$), c'est que l'influence de l'évolution de l'orbite l'emporte sur celle du moment des forces de gravité; si par contre les $|\chi|$ sont grands, c'est l'influence des moments gravitationnels qui l'emporte.

En ce qui concerne la quatrième loi, elle n'a pas son analogue parmi les lois de Cassini initiales. Son rôle n'en est pas moins essentiel. Elle signifie que toute résonance implique un rapport de phases parfaitement déterminé, en l'occurrence entre le mouvement angulaire du rayon vecteur de l'orbite et le mouvement angulaire des axes d'inertie centraux principaux du solide. Dans le cas lunaire (résonance 1/1) cette loi veut simplement dire que l'un des axes d'inertie de la Lune est « asservi » au mouvement du rayon vecteur de l'orbite.

Les lois de Cassini généralisées tiennent compte de la double résonance propre aux mouvements des corps célestes: d'une part entre leurs rotations et révolutions respectives, et d'autre part entre les précessions de leur orbite et de leur axe de rotation propre. La Lune est en double résonance 1/1 + 1/1, et Mercure en double résonance 3/2 + 1/1.

Exemple. *La Lune.* Posons [6.36] $B = 0{,}88836978$, $A = 0{,}88800195$, $C = 0{,}88781798$ (en unités $\mathrm{kg \cdot m^2} \times 10^{35}$), $i = 5°08'43''$. La période de révolution du nœud de l'orbite est de 18,6 ans environ ($K_\Omega = 1934°08'31''$ en 100 ans = 36 525 jours éphémérides); donc $|K_\Omega|/\omega_0 = 0{,}00398324$. La période du mouvement du périgée de l'orbite est de 8,85 ans environ ($K_\omega = 4069°02'03''$ en 100 ans).

Dans les formules de ce n°, on peut poser $L_0 = B\omega_0$. Compte tenu des valeurs indiquées, calculons

$$\chi \approx -0{,}218, \quad \cos \rho^* \approx 0{,}970.$$

Autrement dit, l'inégalité certifiant l'existence de deux mouvements stationnaires est visiblement vérifiée. On montre que dans le mouvement stationnaire cherché ($\rho_0 < \pi/2$) c'est le nœud descendant de

l'équateur de la Lune qui se confond avec le nœud ascendant de son orbite. Portant les valeurs numériques des coefficients dans l'équation (6.13.1) (et posant $I = 1$), on calcule la racine ρ_0 de cette équation (proche de 0). Il vient $\rho_0 = 6°39'42''$. Par conséquent, la valeur de l'angle formé entre l'axe de la Lune et l'axe de l'écliptique est $\rho_0 - i = 1°30'59'' \approx 1°31'$. D'après les données de l'observation (deuxième loi de Cassini) cet angle mesure $1°32'1''$. La bonne corrélation des valeurs témoigne en faveur de la haute fidélité du modèle de mouvement retenu.

S t a b i l i t é. L'équation (6.13.1) admet ou bien deux racines qui correspondent toutes les deux à des positions stables de l'axe de rotation du solide, ou bien quatre racines dont trois correspondent à des positions stables et une à une position instable de l'axe. Soit ρ_0^N l'unique valeur instable possible de ρ_0. Citons les résultats principaux de l'analyse de la stabilité du mouvement en résonance 1/1 faite dans [6.14] et [6.42].

Les conditions nécessaires — et sensiblement suffisantes — de la stabilité sont:

1° le solide tourne autour de l'axe le plus court de son ellipsoïde d'inertie;

2° l'axe le plus long est asservi au mouvement du rayon vecteur de l'orbite;

3° l'angle ρ_0 formé par l'axe de rotation du solide avec la normale au plan de son orbite vérifie la double inégalité

$$\frac{3+2\sqrt{6}}{15} < \cos\rho_0 < 1;$$

4° $\rho_0 \neq \rho_0^N$.

Dans le cas de la Lune ces quatre conditions sont toutes remplies.

Conformément aux équations d'évolution, l'axe effectue un mouvement quasi stationnaire, caractérisé par deux fréquences $\omega_1 \sim \sqrt{\varepsilon}$ et $\omega_2 \sim \varepsilon$, autour de sa position stationnaire; ici ε est l'ordre de petitesse admis des coefficients dans les seconds membres des équations du mouvement. Ainsi donc, les trajectoires décrites par l'axe du solide sur la sphère céleste ne sont pas fermées en général.

Nous avons déjà signalé que les satellites jupitériens Io, Europe, Callisto (J I, J II, J IV), le satellite saturnien Japet (S VIII), ainsi que probablement les satellites saturniens Rhéa, Téthys, Dioné et les satellites martiens Phobos et Deimos tournent en résonance 1/1, à la façon de la Lune. La théorie décrite ci-dessus est donc applicable aussi à ces satellites. Il est possible que les effets des marées aient conduit ces satellites aux mouvements « cassiniens » stationnaires (au sens large du présent essai), comme ils l'ont fait avec la Lune.

On trouve en outre dans [6.14, 6.42] les conditions suffisantes de la stabilité d'un mouvement avec résonance du type mercurial (3/2)

1° $e \neq 0$;

2° le solide tourne autour de l'axe le plus court de son ellipsoïde d'inertie;

3° l'axe le plus long de l'ellipsoïde d'inertie se comporte conformément à la quatrième loi;

4° $\rho_0 \neq \pi$, $\rho_0 \neq \rho_0^N$.

Notons un autre fait important. Pour des valeurs fixées des moments d'inertie la largeur de la zone de résonance, c'est-à-dire du « domaine de stabilité », est déterminée par une quantité d'ordre $\omega_0 \sqrt{\Phi_m}$; si Φ_m est très petit, la résonance donnée est peu probable. Il se trouve que la mise en résonance 3/2 de Mercure n'est pas du tout improbable (au moins du point de vue que nous venons de décrire) en comparaison avec la mise en résonance 1/1 de la Lune, ce qui découle du rapport

$$\Delta = \frac{(\Delta_{max})_M}{(\Delta_{max})_L} = \left(\frac{T_L}{T_M}\right) \sqrt{\frac{\Phi_3}{\Phi_2}} = \frac{28}{88} \sqrt{\frac{0,714}{0,993}} \approx 0,25,$$

où Δ_{max} est la largeur de la zone de résonance pour Mercure et pour la Lune.

Remarques sur la résonance en rotation de Vénus. La justification théorique des résonances dans la rotation de Vénus décrite dans le n° 5 du quatrième essai avait été discutée par P. Goldreich et S. J. Peale [6.2]. On a déjà signalé l'existence d'une relation entre la vitesse angulaire Ω de la rotation propre de Vénus, la vitesse angulaire ω_V de sa révolution et la vitesse angulaire ω_T de la révolution de la Terre autour du Soleil, relation résumée par la formule de résonance

$$\Omega = 4\omega_V - 5\omega_{\oplus}. \qquad (6.13.2)$$

A chaque instant de plus courte approche de la Terre, Vénus lui tourne la même face. Goldreich et Peale ont montré qu'une résonance stable de ce type est effectivement possible et qu'elle est déterminée principalement par l'influence de la Terre, tandis que celle du Soleil est négligeable. Se bornant à étudier dans [6.2] un modèle bidimensionnel de la rotation de Vénus dans le champ des moments gravitationnels engendrés par le Soleil et la Terre, les auteurs ont déduit une équation approchée (par passage à la moyenne) définissant cette rotation:

$$\ddot{\varkappa} + \frac{3}{2}\,\frac{A-C}{B}\,\frac{fM_{\oplus}}{b^3}\,[k_1(p) + k_2(p)]\sin 2\varkappa = 0. \qquad (6.13.3)$$

Ici $\varkappa$ est l'écart angulaire du mouvement par rapport à la résonance rigoureuse, A, B, C les moments d'inertie de Vénus, $M_{\oplus}$ la masse de la Terre, b le demi-grand axe de l'orbite terrestre, f la constante universelle de gravitation, k_1, k_2 des quantités définies par l'« ordre

de la résonance » p ; il est à noter que k_1 tient compte de l'influence gravitationnelle de la Terre et k_2 de celle du Soleil. Cette influence ne se laisse sentir qu'en moyenne dans la rotation donnée avec résonance. C'est ainsi que pour la résonance (6.13.2) on a $p = -5$ (le signe négatif rappelle que Vénus tourne en sens « rétrograde »), $k_1 = 2{,}513$ et $k_2 = 1{,}78 \cdot 10^{-2}$. Il ressort de (6.13.3) qu'une rotation en résonance stricte ($\varkappa \equiv 0$) a des chances d'être stable, à peu près exclusivement grâce à l'influence de la Terre ($k_1 \gg k_2$).

Il existe cependant d'autres considérations qui diminuent sensiblement la probabilité de la mise en résonance du type indiqué :

1° La résonance (6.13.2) n'a rien d'exceptionnel en comparaison avec de nombreuses résonances voisines ayant même largeur (en ordre de grandeur) de la zone de résonance ; il est difficile de montrer que cette résonance précise a plus de chances de se produire que les autres.

2° La largeur relative de la zone de résonance Δ_V de Vénus (en comparaison avec la largeur de la zone de résonance Δ_L de la Lune et Δ_M de Mercure) est infime :

$$\Delta = \frac{(\Delta_{max})_V}{(\Delta_{max})_L} \approx 0{,}225 \cdot 10^{-3}.$$

3° L'analyse faite dans [6.2] laisse à désirer, car on y a négligé pratiquement l'influence puissante du Soleil. Il est vrai qu'en moyenne elle est petite ; or, l'amplitude des perturbations périodiques venant du Soleil (mises en moyenne dans [6.2]) risque de s'avérer très considérable, car la valeur maximale du moment des forces de gravité du Soleil est plus grande d'un facteur 10^3 que celle de la Terre.

En examinant cette question de plus près [6.50], on y découvre que, pour que les perturbations périodiques causées par le Soleil ne fassent pas sortir le mouvement de sa zone de résonance, il faut que le rapport des moments d'inertie de Vénus soit

$$\frac{A-C}{B} \lesssim 2{,}5 \cdot 10^{-5}.$$

On ignore les moments d'inertie vénusiens. En se rappelant toutefois que pour la Lune, par exemple, le rapport des moments est d'environ $5 \cdot 10^{-4}$, on en conclut que l'inégalité ci-dessus est à la limite du raisonnable. De même, la résonance observée dans la rotation de Vénus est, de ce point de vue, à la limite du possible.

Ajoutons que, dans le cadre de l'analyse faite dans [6.2, 6.50], les phénomènes des marées ne peuvent pas expliquer la mise en résonance (6.13.2) de Vénus, à la différence des cas de la Lune et de Mercure. Vénus tourne sur elle-même dans le sens inverse de celui de sa révolution autour du Soleil. On montre dans [6.50] que le moment des marées provenant du Soleil tend à « renverser » Vénus, à la remettre en sens direct. On est donc amené à invoquer d'autres

forces dissipatives pour expliquer la mise en résonance (6.13.2) de Vénus. C'est déjà un quatrième argument en faveur du caractère aléatoire de la résonance (6.13.2).

Ainsi donc, le cas de résonance vénusienne n'est pas aussi irréfutable que ceux de la Lune et de Mercure. S'il existe quand même, on a le droit de dire, après tout ce qui précède, que la résonance observée dans la rotation de Vénus est un phénomène exceptionnel, une merveille de la nature. L'absence d'explication montre probablement que la tendance de la nature au synchronisme est plus forte que nos connaissances d'aujourd'hui.

14. Tendance au synchronisme des rotations dans les champs gravitationnels compliqués. Précession luni-solaire et nutation de l'axe terrestre

Nous avons considéré jusqu'à présent la rotation du corps soumis à l'influence dominante du champ d'attraction engendré par une source unique. On rencontre cependant des cas où il est nécessaire de prendre en considération l'influence d'un plus grand nombre de centres d'attraction de force comparable. Un exemple classique: le mouvement perturbé de l'axe terrestre, fruit des contributions comparables des attractions du Soleil et de la Lune.

Le mouvement perturbé de la Terre — sa précession luni-solaire et sa nutation — ne présente pas de résonance analogue à celle des mouvements de la Lune ou de Mercure. Il est d'autant plus remarquable que le mouvement de la Terre présente une tendance au synchronisme lui aussi. Explicitons un peu cette affirmation.

Introduisons quelques notations: soient C, A les moments d'inertie longitudinal et transversal de la Terre, m_L et m_T les masses respectives de la Lune et de la Terre, e l'excentricité de l'orbite lunaire, e_T l'excentricité de l'orbite terrestre, ϑ_0 l'angle entre l'axe de rotation de la Terre et le vecteur moment cinétique de la Terre ($\vartheta_0 = 0$ à très peu de chose près), L_0 le module du vecteur moment cinétique de la Terre, $\dot{\Omega}$ la vitesse angulaire de précession du nœud de l'orbite lunaire. Soient, de plus, ω_T la vitesse angulaire moyenne de révolution de la Terre et ω_T celle de la Lune. Introduisons des paramètres constants

$$K_C = \frac{3}{8}\,\frac{A-C}{L_0}\,(3\cos^2\vartheta_0 - 1)\,\frac{m_L}{m_L+m_T}\,\frac{\omega_L}{(1-e^2)^{3/2}},$$

$$K_\theta = \frac{3}{8}\,\frac{A-C}{L_0}\,(3\cos^2\vartheta_0 - 1)\,\frac{\omega_T^2}{\omega_L(1-e_T^2)^{3/2}},$$

$$K_\Omega = \frac{\dot{\Omega}}{\omega_L}$$

et construisons la fonction

$$\Phi = -L_0 K_C \cos^2 \rho - L_0 K_\theta \cos^2 \Delta + L_0 K_{\Omega} \cos \Delta,$$

où ρ est l'angle entre le vecteur moment cinétique et la normale au plan de l'orbite lunaire, et Δ l'angle entre le même vecteur et la normale au plan de l'écliptique (l'orbite de la Lune est inclinée d'un angle constant i sur l'écliptique). En vertu des équations d'évolution du mouvement [6.51] les angles ρ, Δ varient dans le temps. Or, ces équations admettent une intégrale

$$\Phi = \Phi_0 = \text{Cte} \tag{6.14.1}$$

qui donne aussitôt lieu à un résultat fondamental:

Toutes les trajectoires possibles du vecteur moment cinétique sont fermées dans un système de coordonnées qui tourne avec le plan de l'orbite lunaire.

La théorie classique de la précession luni-solaire et de la nutation de l'axe terrestre paraît ignorer ce résultat (ainsi que l'intégrale (6.14.1)). Or, ce fait confirme justement la tendance à la mise en synchronisme de la précession de l'axe de la Terre et de celle de l'orbite lunaire. En effet, les ensembles des trajectoires fermées tendent vers des points singuliers qui correspondent à des mouvements stationnaires. On peut interpréter ces mouvements stationnaires comme une généralisation encore plus importante des lois de Cassini en cas d'influence de plusieurs centres d'attraction (deux en l'occurrence). Au cours de l'évolution, le mouvement doit évoluer sous l'action des facteurs dissipatifs vers un mouvement stationnaire où la précession de l'axe de la Terre aurait une vitesse égale à celle de la précession du plan de l'orbite lunaire. Bien sûr, la situation réelle n'a rien à voir avec la situation stationnaire que nous venons de décrire: il suffit de rappeler que l'orbite de la Lune précessionne avec une période de 18,6 ans et l'axe de la Terre avec une période de 26 000 ans. Or, c'est l'aspect théorique du problème qui nous préoccupe maintenant. La nutation réelle de l'axe terrestre avec la période de 18,6 ans est une manifestation de la tendance au synchronisme.

Pour en savoir plus le lecteur consultera utilement le livre [6.51].

15. Un modèle des marées et mise en résonance

On a montré que les moments des forces de gravité exercés sur un corps céleste peuvent en assurer le mouvement stable en résonance défini par les lois de Cassini généralisées. Or, les données initiales du mouvement peuvent se trouver en dehors de la zone de résonance. Il y a peu de chances pour que le mouvement soit dès le début en résonance. Il doit donc y avoir un mécanisme qui garantisse une assez bonne probabilité de la mise en résonance, au cours de l'évo-

lution, d'un mouvement dont les données initiales se situeraient en dehors de la zone de résonance. Ce mécanisme paraît s'expliquer par les marées. La théorie des marées est compliquée et relève d'une multitude de facteurs. Dans le texte qui suit nous nous bornerons à considérer quelques modèles bien simples des phénomènes liés aux marées [6.50, 6.51].

Soit une planète sphérique, d'une rigidité imparfaite, située dans le champ d'attraction du Soleil. La partie la plus rapprochée du Soleil, la partie centrale, la partie la plus éloignée de la planète ne sont pas attirées avec la même force par le Soleil : des bourrelets se forment sur la planète. La masse m de ces bourrelets est approximativement égale à k/r^3, où r est la distance au Soleil [6.2, 6.52]. La planète tourne avec la vitesse angulaire relative ω par rapport au système de coordonnées orbitales, et les bourrelets s'écartent d'un angle δ par rapport à l'axe Soleil-centre de la planète. (Nous considérons le système planète-Soleil à titre d'exemple ; le raisonnement reste valable pour le système Lune-Terre ou pour un système satellite-planète.) Il se produit aussitôt un moment gravitationnel habituel

$$M \sim -\frac{m}{r^3} \sin 2\delta = -\frac{k \sin 2\delta}{r^6}, \quad k > 0. \tag{6.15.1}$$

Soient $\mathbf{e}_\omega$ le vecteur unité dirigé suivant la vitesse angulaire relative de la planète, et $\mathbf{e}_r$ le vecteur unité orienté suivant la direction planète-centre d'attraction. Considérons le plan $\mathbf{e}_\omega$, $\mathbf{e}_r$. La composante de $\mathbf{e}_\omega$ suivant $\mathbf{e}_r$ ne provoque pas la dérive du bourrelet ; la dérive du bourrelet par rapport à $\mathbf{e}_r$ est produite par la composante $\mathbf{e}_\omega^1 = [\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_r] \times \mathbf{e}_r$ normale à $\mathbf{e}_r$ et contenue dans le plan $\mathbf{e}_\omega$, $\mathbf{e}_r$. Par conséquent, l'axe des bourrelets sera situé dans un plan normal à $\mathbf{e}_\omega^1$ et sera dévié (par le moment gravitationnel) dans ce plan vers $\mathbf{e}_r$. Cela signifie que $\mathbf{M}$ est dirigé suivant $\mathbf{e}_\omega^1$. Compte tenu de (6.15.1), on obtient une formule modèle du moment des marées :

$$\mathbf{M} = \frac{k \sin 2\delta}{r^6} [\mathbf{e}_\omega \times \mathbf{e}_r] \times \mathbf{e}_r. \tag{6.15.2}$$

Pour définir de (6.15.2) la valeur du moment des marées, on doit connaître la variation de l'angle δ en fonction du temps et des paramètres du problème. Cette variation est déterminée par le jeu des forces de frottement visqueux à l'intérieur de la planète et des forces d'attraction, ainsi que par la vitesse angulaire ω de rotation relative de la planète.

On utilise généralement deux modèles analytiques de $\delta(\omega)$ [6.2, 6.52] :

1° $$\sin 2\delta \sim 2\delta \sim k_1\omega, \quad k_1 = \text{Cte}, \tag{6.15.3}$$

2° $$\sin 2\delta = \sin 2\delta_0, \quad \delta_0 = \text{Cte}. \tag{6.15.4}$$

Le modèle (6.15.3), linéaire par rapport à la vitesse angulaire relative, n'est valable que dans une plage restreinte de vitesses angulaires ; il apparaît cependant que, dans tous les cas réels envisageables, on puisse rester dans cette plage. Le modèle de signature (6.15.4) couvre une gamme plus étendue mais s'avère trop grossier au voisinage des petites valeurs de ω et de δ. Nous décrirons brièvement les effets provoqués par le moment des marées. Le lecteur trouvera tous les détails dans [6.51].

En analysant les équations d'évolution de la rotation de la planète sous l'action du moment des marées (6.15.2), (6.15.3), on voit que la rotation tend à devenir axiale, autour d'un axe d'inertie principal.

Soient $\Omega = L/A\omega_0$ le rapport de la vitesse angulaire absolue de la rotation propre de la planète à la vitesse angulaire ω_0 de sa révolution ; ρ, l'angle entre le vecteur moment cinétique **L** et la normale au plan de l'orbite.

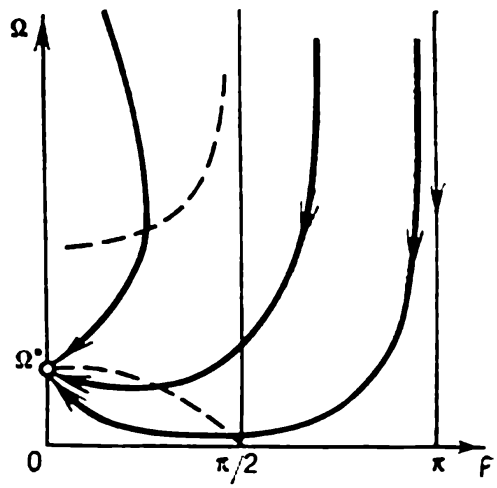


Fig. 6.19. Evolution des paramètres de la rotation sous l'action des marées

Les courbes intégrales de $\Omega(\rho)$ sont représentées schématiquement sur la figure 6.19 [6.51]. A la limite, le mouvement tend vers un point stationnaire unique

$$\rho = 0, \quad \Omega = \Omega^* = \frac{1 + \frac{15}{2} e^2 + \frac{45}{8} e^4 + \frac{5}{16} e^6}{(1 - e^2)^{3/2} \left(1 + 3e^2 + \frac{3}{8} e^4\right)}. \qquad (6.15.5)$$

De la sorte, le moment des marées tend à ramener le mouvement à une rotation directe autour de la normale au plan de l'orbite avec une vitesse angulaire conforme à (6.15.5). On voit qu'en l'absence d'autres moments, le moment des marées détruit nécessairement la rotation rétrograde ($\rho \sim \pi$) ; ce fait intéressant peut s'avérer important en théorie de la rotation de Vénus. En effet, sa rotation en sens rétrograde ne semble pas imputable aux moments des marées.

Un autre résultat tout aussi intéressant : la vitesse angulaire limite est fonction de l'excentricité de l'orbite. On voit la fonction $\Omega^*(e)$ sur la figure 6.20. Pour $e = 0$ on a $\Omega^* = 1$, c'est-à-dire que, pour l'orbite circulaire, le mouvement limite est une rotation en résonance 1/1 (équilibre relatif). G. Colombo [6.44] et I. I. Schapiro [6.52] ont analysé de ce point de vue le mouvement plan de Mercure pour conclure que c'est précisément l'excentricité $e \approx 0{,}2$ de l'orbite

mercuriale qui peut être responsable de sa mise en résonance de rapport 3/2. Dans le modèle (6.15.3) on a $\Omega^* = 3/2$ avec $e \approx 0{,}28$; d'autres modèles pourront diminuer la valeur nécessaire de e. Par exemple, dans le modèle (6.15.4) on a la valeur limite $\Omega^* = 3/2$ pour $e \approx 0{,}23$. D'une façon générale, au spectre des valeurs résonantes de Ω^* correspond un spectre de valeurs de l'excentricité pour lesquelles la valeur donnée de Ω^* peut être atteinte à la limite sous l'action des forces des marées [6.50] (voir tableau 6.1).

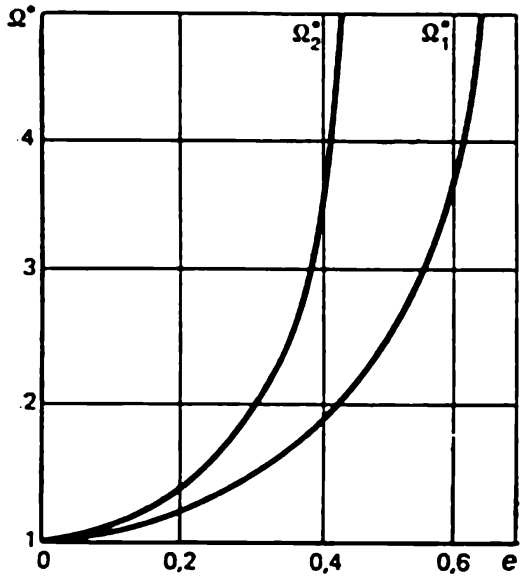


Fig. 6.20. Valeurs limites de la vitesse angulaire sans dimension de rotation de la planète en fonction de l'excentricité de son orbite

La deuxième ligne du tableau a été calculée d'après la formule (6.15.5) et la troisième d'après la formule correspondante pour le modèle (6.15.4):

$$\Omega^* = 1 + \frac{19}{2} e^2 + \frac{461}{24} e^4 + \frac{119\,703}{720} e^6 + \ldots \quad (6.15.6)$$

La formule (6.15.6) est approchée: elle ne contient que les termes de plus bas degré du développement en série suivant les puissances de e. La formule (6.15.5) est exacte.

Si l'on ajoute aux phénomènes des marées le moment gravitationnel que nous avons étudié plus haut, les formules (6.15.5), (6.15.6) prennent une signification un peu différente. Plus exactement, les orbites ayant les excentricités indiquées dans le tableau assurent une probabilité maximale $P \approx 1$ pour que la résonance correspondante se produise *). Si l'excentricité a une valeur proche

Tableau 6.1

	Ω^*	1	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
e	Modèle (6.15.3)	0	0,284	0,392	0,465	0,519	0,561
	Modèle (6.15.4)	0	0,219	0,29	0,34	0,365	0,385

*) La probabilité d'une résonance est le rapport du volume de phases des données initiales conduisant à la mise en résonance au volume du domaine considéré de l'espace de phases.

de celle qui figure dans le tableau, la probabilité de la mise en résonance reste considérable bien qu'inférieure à 1. Si l'on adopte le modèle (6.15.3), la probabilité de la mise en résonance 1/1 de la Lune ($e \approx 0{,}05$) est $P \approx 0{,}6$, et celle de la mise en résonance 3/2 de Mercure ($e \approx 0{,}2$) est $P \approx 0{,}25 \cdot 10^{-1}$ [6.2, 6.50]. De cette façon, la probabilité de la mise en résonance est très grande pour la Lune et moins grande (mais finie) pour Mercure. Quant à Vénus, les calculs donnent une probabilité de sa mise en résonance $P \approx 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Autrement dit, il n'y a pratiquement aucune chance pour que les forces des marées puissent provoquer sa mise en résonance. Ajoutons que la probabilité des résonances a été calculée pour le cas de mouvement plan; pour Vénus une telle estimation risque de s'avérer inexacte, car nous avons vu que la rotation plane est instable vis-à-vis des perturbations tridimensionnelles, en présence des forces des marées.

En ce qui concerne la Lune et Mercure, ils sont exempts de cet inconvénient, car ils tournent dans le sens direct; d'autres modèles des effets des marées sont susceptibles d'améliorer l'estimation de la probabilité de la mise en résonance, surtout pour Mercure (voir [6.2]).

16. Stabilisation magnétique et magnéto-gravitationnelle

De tous les systèmes possibles de stabilisation passive des satellites, c'est le système magnétique qui sera sans doute le plus «familier » pour un public non averti. Dès l'enfance, nous sommes habitués à la stabilité de l'aiguille aimantée de la boussole. D'ailleurs, l'« effet de l'aiguille aimantée » est utilisé couramment dans la pratique du vol spatial pour stabiliser les satellites à l'aide du champ magnétique, quand une telle stabilisation s'impose. Il y a des satellites légers pour lesquels un aimant permanent gros comme un crayon suffit à les « asservir » solidement à une ligne de force du champ magnétique de la Terre. Un tel asservissement est garanti par le moment des forces magnétiques

$$\mathbf{M}' = \mathbf{I} \times \mathbf{H}, \tag{6.16.1}$$

où $\mathbf{I}$ est ce qu'on appelle « vecteur moment magnétique » caractérisant l'intensité de l'aimantation du satellite et $\mathbf{H}$, le vecteur intensité du champ magnétique de la Terre. Le moment $\mathbf{M}$ tend à dévier l'axe du satellite portant le vecteur $\mathbf{I}$ vers le vecteur $\mathbf{H}$, réalisant ainsi la stabilisation du satellite suivant ce vecteur.

En réalité, le problème est loin d'être si simple, à cause de la « construction » compliquée du champ magnétique de la Terre. Une approximation très élémentaire de ce champ magnétique, dite

« champ de dipôles », est décrite par la formule

$$\mathbf{H} = \frac{\mu_E}{r^3}\,[3\,(\mathbf{k}_E\mathbf{e}_r)\,\mathbf{e}_r - \mathbf{k}_E]. \qquad (6.16.2)$$

Ici, $\mathbf{k}_E$ est le vecteur unité de l'axe d'un dipôle magnétique (on suppose, en simplifiant encore, que $\mathbf{k}_E$ est dirigé suivant l'axe de rotation de la Terre vers son pôle Sud), $\mathbf{e}_r$ le vecteur unité orienté suivant la direction du rayon vecteur du point actuel sur l'orbite (dont r est le module), μ_E une constante caractéristique du moment magnétique du dipôle (pour la Terre $\mu_E \approx 8\cdot 10^{25}$ Oe·cm^3). Ainsi donc, le moment (6.16.1) dépend d'une façon non élémentaire, définie par (6.16.2), de la position du satellite; de surcroît, le vecteur **H** varie irrégulièrement le long de l'orbite, ce qui ne simplifie pas les équations du mouvement.

Considérons, à titre d'exemple, le mouvement d'un satellite en orbite circulaire polaire. Une telle orbite admet un mouvement plan (contenu dans le plan de l'orbite) du satellite, qui a pour équation [6.1]

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + \alpha\sqrt{1+3\sin^2 u}\,\sin\varphi = \frac{6\sin 2u}{(1+3\sin^2 u)^2}, \quad \alpha = \frac{I_0\mu_E}{B\mu}, \qquad (6.16.3)$$

Ici φ est l'angle entre « l'axe d'aimantation » et le vecteur **H**. L'axe d'aimantation, c'est-à-dire le support du vecteur moment magnétique **I** du satellite ($|\mathbf{I}| = I_0 = \mathrm{Cte}$), est par hypothèse fixé immuablement dans le satellite et toujours contenu dans le plan de l'orbite; u est l'argument de la latitude (compté à partir de l'équateur); la constante sans dimension α comprend, en plus des grandeurs énumérées, le moment d'inertie B du satellite par rapport à l'axe normal au plan de l'orbite, ainsi que la constante de la gravitation μ.

La première conclusion qu'on tire de (6.16.3) est que la stabilisation précise dans le champ magnétique ($\varphi = 0$) est irréalisable. Elle est empêchée par le second membre de l'équation (dû à la variation irrégulière du vecteur **H** le long de l'orbite). Cependant, on peut essayer de construire des solutions périodiques de (6.16.3) susceptibles de définir les oscillations périodiques de l'axe du satellite par rapport à une ligne de force magnétique (c'est-à-dire par rapport au vecteur **H**). En regardant les coefficients de l'équation (6.16.3), on s'assure que ces oscillations doivent être de période π, car le vecteur **H** reprend sa direction initiale à chaque demi-révolution du satellite.

Les résultats de la recherche numérique des solutions périodiques sont représentés sur la figure 6.21. (Ces résultats ont été obtenus par l'auteur et publiés pour la première fois par son élève A. Khentov dans son article [6.53].) Le schéma de la figure traduit les variations de l'amplitude a d'une solution périodique de (6.16.3) en fonction d'un paramètre unique du problème, à savoir de α_*. On peut appeler

cette courbe « réponse en amplitude ». On voit aussitôt que la solution périodique n'est pas unique : on a une infinité de solutions périodiques pour $\alpha_* \to \infty$. Il est vrai qu'une certaine stabilisation magnétique est réalisée à la base de toutes les branches de la courbe : les amplitudes ne sont pas grandes et, de plus, les mouvements correspondants sont stables. Or, les amplitudes des oscillations cessent

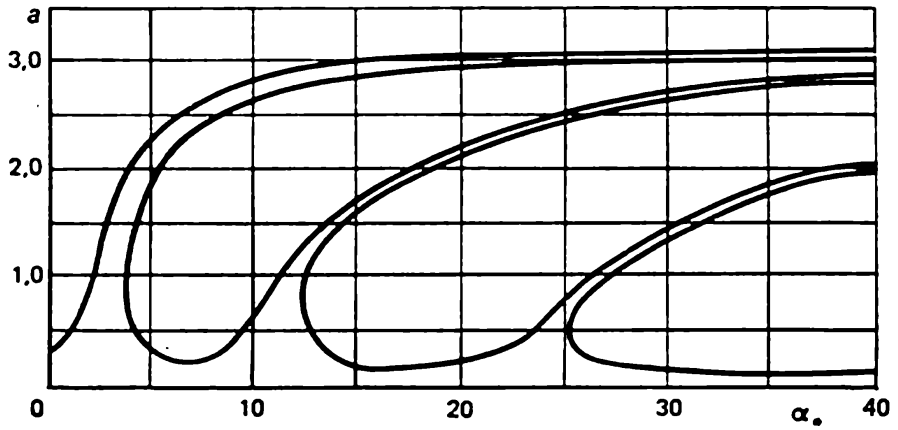


Fig. 6.21. Amplitude des oscillations périodiques d'un satellite dans le champ magnétique en fonction du paramètre d'aimantation

d'être petites au voisinage de certaines valeurs critiques (« résonantes ») de α_*, si bien qu'on a intérêt à éviter ces valeurs pour assurer la stabilité du satellite.

Ces valeurs critiques sont faciles à cerner. Dans la zone des faibles amplitudes on a $\sin\varphi \approx \varphi$; le second membre de l'équation (6.16.3) se laisse développer en série de Fourier

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2ku,$$

et le coefficient de φ dans le premier membre, en série

$$\alpha_* \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2ku\right),$$

où l'on peut remplacer sans grande erreur $a_0/2$ par $\sqrt{\frac{5}{2}}$. Cherchons une olution périodique de l'équation (6.16.3) linéarisée sous la forme

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin 2ku.$$

On obtient en première approximation pour les coefficients A_k

$$A_k \approx \frac{b_k}{\sqrt{\frac{5}{2}\alpha_* - 4k^2}},$$

d'où l'on déduit les valeurs critiques de α_* :

$$\alpha_* = \frac{8}{\sqrt{10}} k^2 \approx 2{,}5k^2, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,$$

soit

$$\alpha_* = 2{,}5;\ 10;\ 22{,}5;\ 40;\ 62{,}5;\ 90;\ 122{,}5;\ 160;\ 202{,}5;\ 250\ \ldots$$

Cette suite est aisément « perceptible » sur la figure 6.21. (Dans [6.53] les nombres figurant dans la suite sont précisés.) Remarquons, enfin, qu'on a pour toute solution périodique $\sin\varphi \to 0$ quand $\alpha_* \to \infty$; autrement dit : l'amplitude de la solution tend soit vers π, soit vers 0, ce qui est visible aussi sur la figure 6.21.

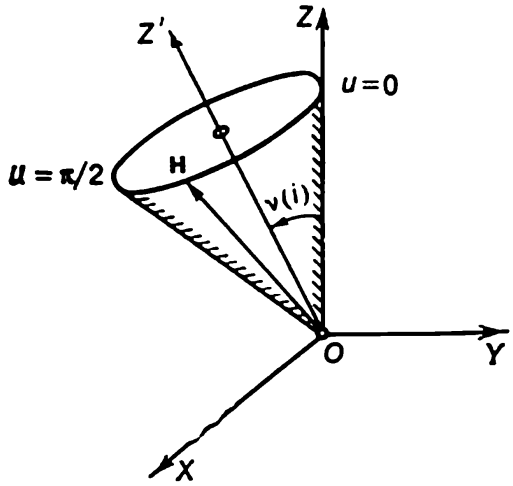


Fig. 6.22. Cône d'intensité magnétique

Dans tous les cas, le satellite considéré dans l'espace absolu fait exactement deux tours sur lui-même pendant chaque révolution (rotation en résonance 2/1).

Mais que faire si l'orbite n'est pas polaire ? L'image réconfortante de l'aiguille aimantée nous autorise à affirmer avec assurance que la stabilisation du satellite reste possible ; et, l'assurance aidant, on se met à écrire les équations et à les intégrer.

Cependant, au cours de sa vie de scientifique, l'auteur a eu souvent l'occasion de remarquer que le stade de la méditation est plus précieux et plus fructueux que le stade « opérationnel » (écrire des équations, faire des calculs...). A méditer sur le problème, à le tourner et retourner dans l'esprit, on finit (ou non) par concevoir quelques idées géométriques ou mécaniques qui rendent le problème limpide, la marche à suivre bien déterminée, et les effets escomptés prévisibles. Dans la description de notre problème de stabilisation mécanique, nous nous arrêterons justement au stade de la réflexion, sans passer au stade « opérationnel » avec son appareil mathématique encombrant.

A cet effet, considérons le comportement du vecteur **H** défini par (6.16.2) le long de l'orbite d'un satellite artificiel de la Terre. Introduisons le système de coordonnées de König *OXYZ* (fig. 6.22)

où l'origine O est au centre de masse du satellite, l'axe OZ est colinéaire à l'axe de rotation de la Terre et l'axe OX colinéaire à la droite allant du centre de la Terre vers le nœud ascendant de l'orbite. Pendant le mouvement du satellite sur son orbite, le vecteur **H** (6.16.2) décrira en coordonnées $OXYZ$ une surface conique qui se ferme au bout d'une demi-révolution (un **H**-cône). En effet, on voit de (6.16.2) que $\mathbf{H}(\mathbf{e}_r) = \mathbf{H}(-\mathbf{e}_r)$. Une des génératrices du cône se confond avec l'axe OZ, et le **H**-cône lui-même est symétrique par rapport au plan ZY (fig. 6.22). Soit T_H la période du mouvement du vecteur **H** sur le **H**-cône, et soit T_0 la période de révolution du satellite. Introduisons les fréquences $\omega_H = 2\pi/T_H$, $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Alors $\omega_H = 2\omega_0$. Soient u l'argument de la latitude du centre de masse du satellite et i l'inclinaison de son orbite sur l'équateur terrestre. **H** a comme module

$$H = \frac{\mu_E}{r^3}\sqrt{1 + 3\sin^2 i \sin^2 u}.$$

Quand le satellite est dans le nœud ascendant de son orbite ($u = 0$), le module de **H** prend sa valeur minimale (en u) $H_{\min} = \mu_E/r^3$, et la direction de **H** se confond avec l'axe OZ. Quand $u = \pi/2$, le vecteur **H** a le plus grand module (en u)

$$H_{\max} = \frac{\mu_E}{r^3}\sqrt{1 + 3\sin^3 i}$$

et s'écarte au maximum de l'axe OZ, faisant avec ce dernier un angle 2ν, $\nu \leqslant \pi/2$, où

$$\operatorname{tg}\nu = \frac{1{,}5\sin 2i}{1 - 3\sin^2 i + \sqrt{1 + 3\sin^2 i}} \tag{6.16.4}$$

[6.54]. Remarquons aussi que l'extrémité du vecteur **H** décrit une circonférence coplanaire à l'orbite du satellite. En orbite équatoriale le **H**-cône se réduit à une droite, et en orbite polaire il se déploie en un plan. Telles sont les principales propriétés du **H**-cône.

Soit une demi-droite OZ' située à l'intérieur du **H**-cône, contenue dans le plan ZY et faisant avec OZ un angle ν défini par (6.16.4). On dit que OZ' est l'axe du **H**-cône. Construisons un cône circulaire dont l'axe se confond avec celui du **H**-cône et le demi-angle au sommet est égal à ν. Il se trouve qu'un tel cône circulaire, dit ν-cône, se confond à peu près complètement avec le **H**-cône. Soit $\varkappa$ l'écart angulaire entre le vecteur **H** et l'axe du **H**-cône. On a alors $\varkappa = \nu$ quand $u = 0$ et $u = \pi/2$, $\varkappa > \nu$ pour tout autre u tel que $0 < u < \pi$. Autrement dit, le ν-cône circulaire est entièrement contenu à l'intérieur du **H**-cône et a deux génératrices opposées en commun avec le **H**-cône. Or, la différence $\varkappa - \nu$ est toujours petite : elle ne dépasse pas $1°11'$ pour $i \approx 52°6'$ et est encore plus petite pour d'autres i [6.54]. Ainsi donc, le **H**-cône est très proche du ν-cône.

Cependant, il convient de rappeler que **H** parcourt le **H**-cône

avec une vitesse non constante. Bien que la rotation de **H** soit assez irrégulière, la ressemblance entre le **H**-cône et le ν-cône permet de proposer la méthode suivante de construction et de description des mouvements du satellite stabilisés par rapport au vecteur **H**.

Nous savons que, dans le cas général, le mouvement non perturbé d'un satellite dynamiquement symétrique autour de son centre de masse se réduit à une précession régulière: l'axe de symétrie du satellite tourne uniformément autour du vecteur moment cinétique fixe, en conservant un écart angulaire constant par rapport à celui-ci. Supposons que le satellite soit magnétiquement neutre. Imprimons-lui une précession régulière telle que son axe de symétrie tourne uniformément en décrivant un ν-cône avec la fréquence ω_H. Pour cela, le vecteur moment cinétique doit être dirigé suivant l'axe du ν-cône et l'angle des axes du satellite et du ν-cône doit être égal à ν.

Il est clair que dans une telle précession régulière l'axe du satellite se trouve « asservi » au vecteur intensité magnétique **H**. Deux fois, pendant la période de la précession, l'axe du satellite se superpose exactement au vecteur **H**; entre ces instants il s'écarte de **H** et atteint deux fois l'écart maximal. L'écart se produit parce que la rotation de **H** est irrégulière et celle de l'axe du satellite, régulière.

Ainsi donc, l'axe du satellite effectue des oscillations périodiques autour du vecteur **H**. La période de ces oscillations est égale à la demi-période de révolution du satellite. Leur amplitude maximale Δ ne dépend que de l'inclinaison i de l'orbite. Le maximum de Δ a lieu en orbite polaire ($i = 90°$) où l'amplitude des oscillations atteint 19°,5. (Sur la figure 6.21 pour $\alpha_* = 0$ l'amplitude a est justement égale à 19°,5.) Sur les autres orbites Δ est moins grand: quand $i \to 0°$. Δ décroît de façon monotone jusqu'a 0° [6.54].

Or le régime périodique d'« asservissement » à **H** que nous venons de décrire est instable, car la précession régulière d'un satellite magnétiquement neutre est instable (suivant l'angle de précession). « Branchons » à présent le moment magnétique **I** du satellite et dirigeons-le suivant l'axe de symétrie: il se produit aussitôt un moment des forces magnétiques défini par (6.16.1). Ce moment nous sera doublement utile: l'asservissement de l'axe du satellite au vecteur **H** deviendra stable et, pour des valeurs suffisamment élevées de $I_0 = |\mathbf{I}|$. les oscillations entre l'axe du satellite et le vecteur **H** deviendront plus faibles en amplitude. On arrive à construire des régimes périodiques stables correspondants en prenant comme solution génératrice la précession régulière de l'axe du satellite suivant le ν-cône décrite plus haut, de fréquence $\omega_H = 2\omega_0$.

Maintenant que nous avons bien compris le fond du problème, nous pourrions passer à l'établissement pratique des équations du mouvement. C'est ce qu'a fait A. Khentov: dans son travail [6.54] il a analysé les idées avancées par son maître et a poussé plus loin, jusqu'aux formules de calcul, aux courbes et aux valeurs numériques.

Si l'aimantation du satellite n'est pas grande, on risque de voir les écarts périodiques de la stabilisation suivant **H** croître au lieu de diminuer. On le remarque d'ailleurs déjà sur la figure 6.21 : pour des α_* petits des oscillations sont plus grandes en amplitude que pour $\alpha_* = 0$. Il est vrai que les mouvements périodiques se stabilisent par la même occasion, mais cela ne nous avance guère puisque leur amplitude dépasse facilement 30° !

Pour comprendre l'origine de ces écarts considérables et trouver le moyen de les supprimer, il est bon de décrire la situation en termes de la théorie des perturbations. L'appareil de cette théorie est particulièrement adapté aux petits moments magnétiques.

Nous nous rappelons qu'en mouvement perturbé du satellite le mouvement perturbé du vecteur moment cinétique se trouve superposé au mouvement du satellite par rapport au vecteur moment cinétique. Parmi les mouvements possibles de cette nature, on trouve des régimes stationnaires avec résonances où le vecteur moment cinétique **L** est fixe et de module constant, tandis que l'axe du satellite tourne autour de **L** avec la fréquence $\omega_H = 2\omega_0$. A leur tour, parmi ces régimes stationnaires on trouve des régimes qui sont à peu près conformes aux mouvements périodiques que nous avons considérés précédemment. Le point difficile réside dans le fait que l'axe de la direction stationnaire du vecteur **L** s'écarte (parfois très notablement), pendant ces mouvements, de l'axe du ν-cône (du **H**-cône), d'où un écart considérable entre **H** et l'axe du satellite.

Vient l'instant solennel où l'on se demande s'il est possible d'« améliorer » la direction stationnaire de **L** en faisant jouer d'autres forces (non magnétiques).

En effet, parmi les mouvements du satellite en résonance dans le champ *gravitationnel*, il existe un mouvement stable en résonance 2/1 où l'axe du satellite fait deux tours dans l'espace pendant chaque révolution du satellite autour de la planète. Il est donc théoriquement possible de mettre à profit le mouvement « gravitationnel » en résonance 2/1 de telle façon que l'axe du satellite soit « asservi » au vecteur intensité magnétique. En branchant le moment magnétique, nous ne compromettrons pas la précession en résonance de l'axe du satellite; bien au contraire, la position stationnaire du vecteur **L** deviendra « améliorée » par le jeu des moments magnétique et gravitationnel.

Un mouvement ainsi construit comprendra deux paramètres libres : l'angle au sommet du cône de précession et le rapport des modules des moments magnétique et gravitationnel. Par un choix judicieux de ces deux paramètres, on arrivera à superposer le cône de précession au ν-cône.

Mieux, l'influence commune de deux facteurs stabilisateurs doit élargir la zone de stabilité en comparaison avec les zones assurées par chaque facteur séparément.

Ainsi donc, le satellite se trouve stabilisé par rapport au champ magnétique de la Terre quand on utilise simultanément l'influence du moment gravitationnel et du moment magnétique. L'idée de la stabilisation magnéto-gravitationnelle d'un satellite dans le champ magnétique de la Terre a été avancée et discutée par V. Béletski et A. Khentov dans [6.55].

Il semble que des effets de cette nature puissent jouer un certain rôle, aussi, dans la rotation des satellites naturels des planètes, à condition que les planètes et leurs satellites possèdent leurs propres champs magnétiques. Nous sommes déjà habitués à l'idée que plusieurs satellites naturels (la Lune, certains satellites de Jupiter et de Saturne, les deux satellites de Mars) gravitent en résonance 1/1. Mercure tourne en résonance 3/2. Le mouvement de ces corps est conforme aux lois de Cassini généralisées, qui ne tiennent compte que de l'action des moments gravitationnels. Or, l'effet des moments magnétiques peut contribuer à la mise des corps célestes naturels en résonance 2/1 !

Il s'agit surtout des satellites qui ont leur propre champ magnétique et gravitent autour d'une planète douée d'un champ magnétique. Il se peut que certains satellites de Jupiter ou de Saturne vérifient ces conditions. A ce jour on n'a aucune information sur les champs magnétiques des satellites des planètes du système solaire (la Lune mise à part) et on ne connaît aucune résonance 2/1. Mais si jamais vous entendez parler d'une découverte de cette nature, pensez à mon livre !

SEPTIÈME ESSAI

UNE SPIRALE QUI MÈNE DANS L'ESPACE

Imaginez-vous une spirale éblouissante, ferme, qui disparaît dans le ciel ! ...

A. Voznessenski
La poire triangulaire

1. La faible poussée

Un peu partout dans le monde, des laboratoires travaillent à des moteurs à réaction où la veine gazeuse est remplacée par un courant de particules chargées mises en vitesse dans un champ électrostatique (ce peuvent être un moteur ionique dont le principe est l'interaction du courant électrique et du champ magnétique, un moteur à plasma et d'autres propulseurs [7.1]). A la différence des moteurs à réaction utilisant un propergol chimique, les moteurs dont nous parlons ne procurent qu'une poussée fort limitée, si bien que l'accélération communiquée au vaisseau spatial ne dépasse guère quelques mm/s². Autrement dit, elle ne représente que quelques millièmes de l'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre ($g_0 = 9{,}81$ m/s²). Pas question de s'arracher à l'attraction terrestre : il faut des moteurs-fusées (chimiques) à propergols pour avoir une accélération plus grande que g_0.

Or, une fois que le vaisseau a été mis en orbite circumterrestre, le moteur à faible poussée s'avère d'une grande utilité. Il peut fonctionner longtemps sans arrêt et réaliser une évolution lente (à cause de la petitesse de la poussée) mais inexorable de l'orbite du satellite. Sans se presser, l'engin spatial se met en vitesse, spire après spire, en parcourant une trajectoire spirale autour de la Terre jusqu'au moment où, sa vitesse devenant parabolique, il pourra quitter la banlieue terrestre et se diriger vers des planètes lointaines. Une telle manœuvre pourra présenter des avantages certains, car la masse consommable sera nettement moindre qu'avec les seuls moteurs à propergols. Par conséquent, on pourra envoyer dans l'espace une charge utile plus importante.

Quand un engin parcourant d'abord une orbite fermée autour de la planète se trouve ensuite accéléré jusqu'à la vitesse parabolique, on dit qu'il suit une trajectoire de mise en vitesse. Dans cet essai nous étudierons quelques propriétés des trajectoires spirales.

2. Paramètres et paradoxes de la mise en vitesse

Bornons-nous à considérer le cas particulier, quoique important, où la poussée du moteur, orientée en permanence suivant la tangente à la trajectoire, est caractérisée par une accélération constante f_d. Introduisons quelques notations (fig. 7.1) : r est la distance du centre d'attraction à l'engin spatial (dont la masse est traditionnellement supposée concentrée dans son centre de masse); V_d, la vitesse de l'engin ; le vecteur accélération de poussée $\mathbf{f}_d$ est, par hypothèse, colinéaire au vecteur vitesse $\mathbf{V}_d$; enfin, α est l'angle entre les directions

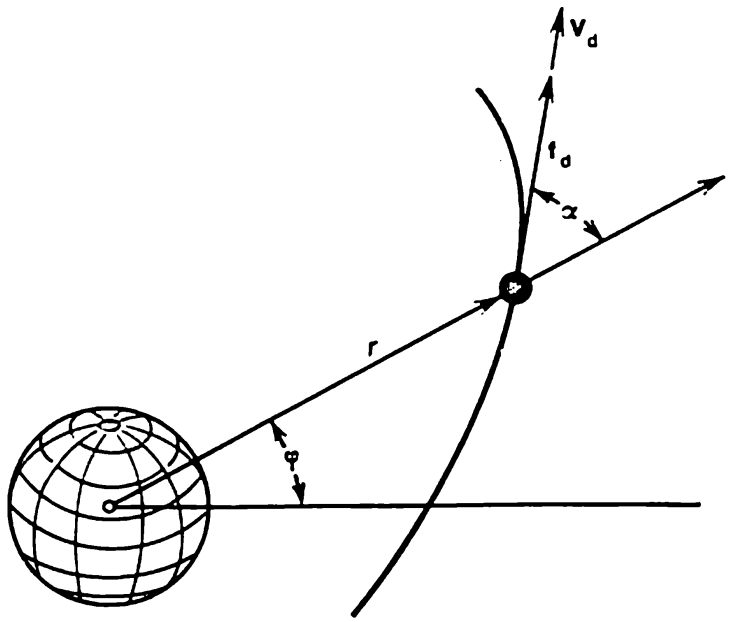


Fig. 7.1. Les paramètres de la trajectoire

des vecteurs $\mathbf{r}$ et $\mathbf{V}_d$. On remarque sur la figure 7.1 l'angle polaire φ. Soient en outre r_0 une distance fixe quelconque de l'engin au centre d'attraction (par exemple la distance initiale) et g l'accélération de la pesanteur à cette distance. Il est commode d'introduire des variables sans dimension

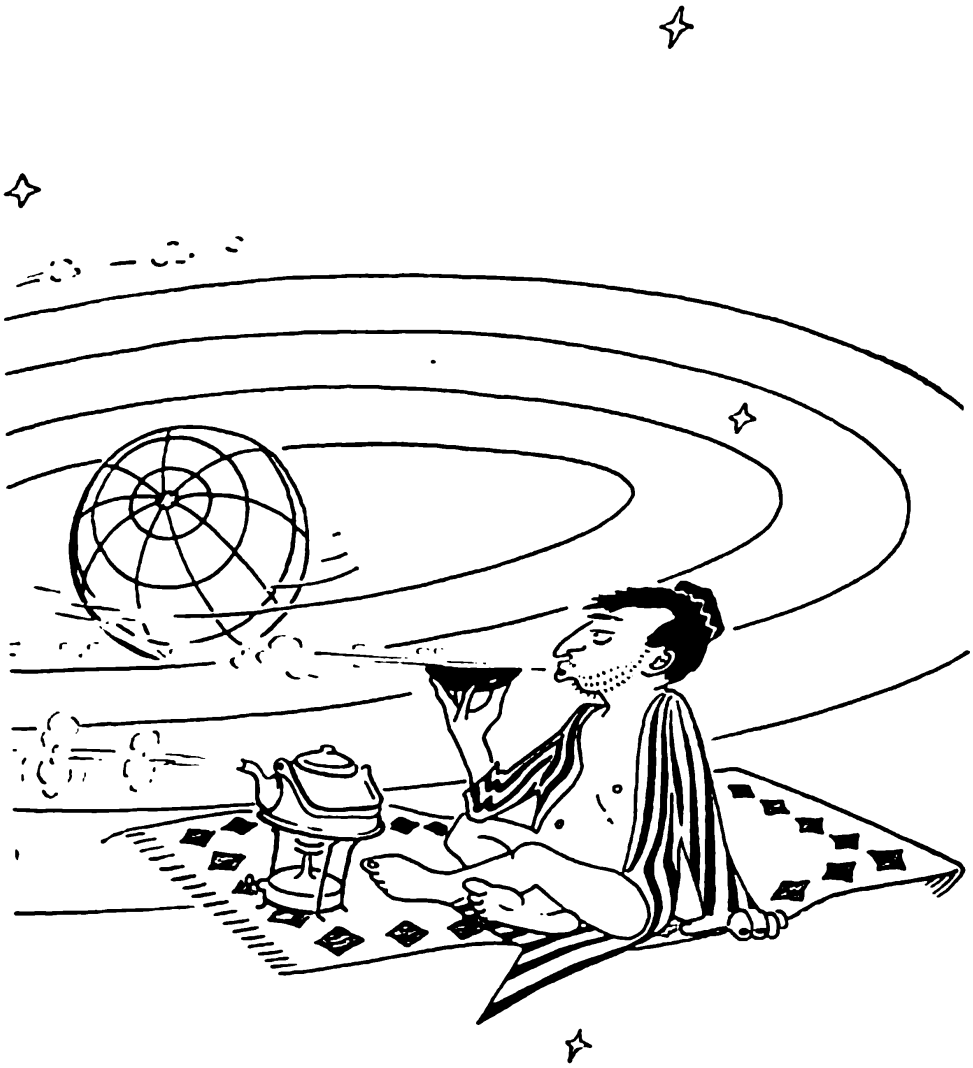
$$\rho=\frac{r}{r_0},\quad V=\frac{V_d}{\sqrt{gr_0}},\quad \tau=\sqrt{\frac{g}{r_0}}\,t. \tag{7.2.1}$$

Ici τ est le temps courant sans dimension et t, le temps avec dimension.

Introduisons l'accélération de poussée sans dimension

$$f = f_d/g. \tag{7.2.2}$$

Ensuite, comme V. Béletski et V. Egorov dans [7.2], mettons les équations du mouvement, au moyen des variables V, ρ, α,



sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV}{d\tau}=f-\frac{\cos\alpha}{\rho^2}, \qquad \frac{d\rho}{d\tau}=V\cos\alpha,\\ &\frac{d}{d\tau}\cos\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{\rho V}\left(\frac{V^2}{2}+h\right), \quad h=\frac{V^2}{2}-\frac{1}{\rho}. \end{aligned}\right\} \tag{7.2.3}$$

La première de ces équations définit le mouvement en projection sur la tangente à l'orbite; f est l'accélération de poussée, et le deuxième terme du second membre, la projection de l'accélération qui provient de la force de l'attraction newtonienne. Quant à la deuxième équation, elle définit simplement la composante radiale de la vitesse de l'engin. La troisième équation décrit le mouvement en projection sur la normale à la trajectoire. La quantité h qui intervient dans cette équation est l'énergie mécanique sans dimension du mouvement.

Pour que la trajectoire soit complètement définie, il manque l'équation pour l'angle polaire φ:

$$\frac{d}{d\tau}(\rho^2\dot{\varphi})=f\rho\sin\alpha. \tag{7.2.4}$$

Connaissant la solution du système (7.2.3), on peut intégrer (7.2.4) par une quadrature.

Le système (7.2.3) est fermé et, conjointement avec (7.2.4), donne une description complète de la trajectoire et de la loi du mouvement. Par malheur, il est impossible de faire l'intégration sous forme analytique fermée.

Pour faire l'analyse qualitative il est commode en outre d'écrire les équations différentielles pour les éléments osculateurs de l'orbite: l'énergie h et le demi-paramètre focal p. Elles s'obtiennent facilement en dérivant par rapport au temps les identités $h = V^2/2 - 1/\rho$ et $p = \rho^2 V^2 \sin^2\alpha$ et en portant dans le résultat les expressions de $\dot{V}$, $\dot{\rho}$, $\dot{\alpha}$ tirées de (7.2.3). Il vient

$$\frac{dh}{d\tau}=fV, \quad \frac{dp}{d\tau}=\frac{2fp}{V}. \tag{7.2.5}$$

On remarque aussitôt que l'énergie h et le demi-paramètre focal p augmentent de façon monotone. L'énergie h est liée à la longueur du demi-grand axe a de l'orbite par la relation $h = -1/2a$. Puisque de toute évidence $a > 0$, on a $h < 0$ (jusqu'au moment où, la vitesse parabolique étant atteinte, on aura $h = 0$). La croissance monotone de h traduit l'allongement monotone du demi-grand axe a de l'orbite. L'augmentation simultanée des paramètres p, a décrit le « gonflement » de l'orbite qui devient de plus en plus grande. Il est clair que, l'accélération f étant faible, la trajectoire après la première révolution est assez semblable à une ellipse képlérienne obtenue pour $f = 0$; or, puisque $da/d\tau > 0$ et que $dp/d\tau > 0$, l'ellipse « gonfle »

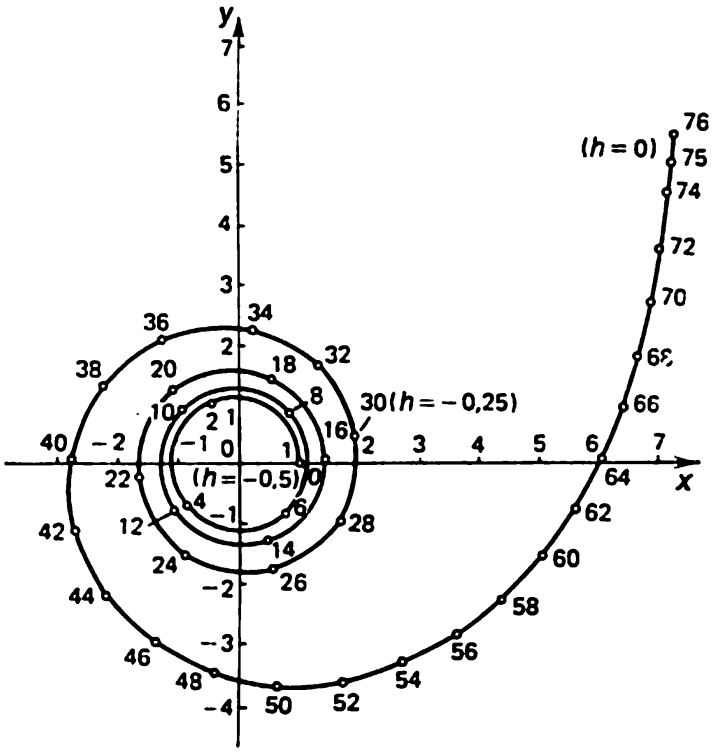


Fig. 7.2. Un exemple de mise en vitesse à partir de l'orbite circulaire. Les chiffres affectant la trajectoire marquent la durée de vol sans dimension

d'une spire à l'autre, si bien que *le vaisseau spatial orbite autour de la Terre suivant une spirale qui se déroule.*

Un exemple de spirale de cette nature (obtenu par l'intégration numérique des équations du mouvement (7.2.3), (7.2.4)) est illustré sur la figure 7.2. Nous avons pris une valeur assez grande de f, égale à 0,01, afin d'abréger le calcul ; il n'empêche que la trajectoire de la figure 7.2 présente toutes les propriétés qualitatives fondamentales inhérentes aux trajectoires avec f plus petit. L'orbite initiale a été supposée circulaire (on a en orbite circulaire $V = 1$, $\rho = 1$, $h = -0{,}5$).

En regardant la figure on voit que les quelques spires de la spirale qui se déploie sont suivies par la phase finale du vol du vaisseau spatial : en cette phase, qui épouse la forme d'un arc de spirale plus doux qui ne s'enroule déjà plus autour de la Terre, le vaisseau atteint la vitesse parabolique (ou, ce qui revient au même, $h = 0$). Ensuite, le vaisseau s'éloigne de la Terre en emmagasinant une énergie de plus en plus importante.

Etudions sommairement les propriétés du mouvement qui ressortent des équations (7.2.3). Supposons que l'orbite initiale soit circulaire et que f soit très petit. Dans ces conditions, le vaisseau spatial aura fait une multitude de révolutions autour de la Terre en suivant la trajectoire en spirale dont chaque spire peut être assi-

milée à une orbite circulaire, au moins sur une portion suffisamment longue au début du mouvement. Ceci est précisément l'approximation essayée (elle est confirmée d'ailleurs par calcul numérique). Si chaque spire de la trajectoire est (approximativement) une orbite circulaire képlérienne, il doit y avoir

$$V^2 = \frac{1}{\rho}.$$

On a alors

$$h = \frac{V^2}{2} - \frac{1}{\rho} = -\frac{V^2}{2};$$

portant cette valeur de h dans (7.2.5) pour la dérivée de h, on obtient

$$\frac{dV}{d\tau} = -f \tag{7.2.6}$$

(auquel cas il ressort de la première équation (7.2.3) que $\cos\alpha = 2f\rho^2$).

L'intérêt de l'équation (7.2.6) est qu'elle définit avec évidence un fait visiblement paradoxal : si le satellite est soumis à une force agissant dans le sens de sa progression le long de son vecteur vitesse, la vitesse du satellite se voit *diminuer* (en moyenne). On dirait que la force, en changeant de signe, repousse le satellite vers l'arrière ! Ce paradoxe est bien sûr illusoire : en effet, l'énergie du mouvement croît, de même que le demi-grand axe de l'orbite ; or, en vertu de la troisième loi de Kepler, l'allongement du demi-grand axe de l'ellipse fait croître la période de révolution du satellite, c'est-à-dire diminue en moyenne la vitesse du mouvement, conformément à la formule (7.2.6).

Dans le premier essai nous avons mentionné le « paradoxe aérodynamique » dans le mouvement du satellite : la résistance de l'atmosphère se traduit par une augmentation de la vitesse du satellite (en moyenne). Maintenant nous avons affaire à un paradoxe analogue : la force de frottement atmosphérique s'exerce suivant la tangente à l'orbite du satellite mais dans le sens inverse de sa progression, l'énergie du mouvement diminue, le demi-grand axe de l'orbite se raccourcit, la période de révolution du satellite devient plus courte, et la vitesse moyenne du mouvement du satellite sur son orbite croît. Cet accroissement se définit, lui aussi, par la formule (7.2.6), quitte à y poser $f < 0$. Plus exactement, on a dans ce cas

$$f = -c\rho_{at}V^2,$$

où c est un paramètre constant et ρ_{at} la densité de l'atmosphère.

Revenons à notre problème de la mise en vitesse du vaisseau spatial par une accélération constante dirigée suivant la tangente à la trajectoire.

La vitesse du mouvement du satellite continue à diminuer en moyenne tant que son énergie reste négative, $h < 0$. Or, augmentant de façon monotone, l'énergie h atteindra la valeur $h = 0$ au bout d'un temps fini, après quoi, devenue positive, elle continuera à augmenter. En effet, pour $h = 0$ on a $V \neq 0$ et, d'après (7.2.5), $dh/dt \neq \neq 0$. Or, si $h > 0$, il ressort de la troisième équation différentielle (7.2.3) que $\cos\alpha$ croît de façon monotone, avec $\cos\alpha \to 1$ quand $\tau \to \infty$. En accord avec la deuxième équation (7.2.3), on a alors $p \to \infty$ pour $\tau \to \infty$ et en accord avec la première, $dV/d\tau \approx f > 0$ pour $\tau \to \infty$ car dans cette équation le terme $\cos\alpha/\rho^2$ devient aussi petit que l'on veut quand $\tau \to \infty$. On peut donc admettre que la vitesse du mouvement en orbite diminue en moyenne de façon monotone quand $h < 0$ et augmente en moyenne de façon monotone quand $h > 0$. Autrement dit, la vitesse passe par un minimum absolu dans un voisinage de $h \approx 0$ et $dV/d\tau = 0$.

Cette constatation est utile pour la recherche des valeurs approchées des paramètres de la trajectoire en fin de la phase de mise en vitesse. En effet, ce qui nous préoccupe surtout c'est l'instant où le vaisseau atteint la vitesse parabolique ($h = 0$). A quelle distance de la Terre cela arrivera-t-il ? Au bout de quel temps ? Quelle sera la vitesse du vaisseau à cet instant ? La condition « $dV/d\tau = 0$ pour $h = 0$ » aide à répondre à toutes ces questions. Appliquons en effet cette condition à la première équation (7.2.3). Il vient

$$\rho_* = \sqrt{\frac{\cos\alpha_*}{f}}. \tag{7.2.7}$$

Le signe * en indice inférieur rappelle que les valeurs des paramètres correspondent à la fin de la phase de mise en vitesse. La valeur de $\cos\alpha_*$ reste à déterminer.

Puisque la vitesse parabolique V_* vérifie la condition

$$V_*^2 = \frac{2}{\rho_*},$$

il ressort de (7.2.7) que

$$V_* = \sqrt[4]{\frac{4f}{\cos\alpha_*}}. \tag{7.2.8}$$

Pour calculer la durée τ_* de la phase de mise en vitesse, intégrons la première équation (7.2.5). Il vient

$$h_* - h_0 = f\bar{V}\tau_*, \tag{7.2.9}$$

où $\bar{V}$ est la valeur moyenne de la vitesse dans cette phase. On peut poser

$$\bar{V} = \frac{V_0 + V_*}{2},$$

où V_0 est la vitesse initiale et V_* la vitesse parabolique. Or, puisque $h_* = 0$, $h_0 = -0{,}5$, $V_0 = 1$ et V_* se définit par (7.2.8), on obtient à partir de (7.2.9)

$$\tau_* = \frac{1}{f\left(1+\sqrt[4]{\frac{4f}{\cos\alpha_*}}\right)}. \qquad (7.2.10)$$

Pour que tous les paramètres de la trajectoire au point de mise en vitesse soient connus, il nous manque l'angle α_*. On trouve la formule correspondante *) dans [7.2], mais pour les calculs approximatifs elle n'est pas obligatoire. L'essentiel est de connaître, ne soit-ce qu'approximativement, les paramètres au point de mise en vitesse. Profitons du fait que $\cos\alpha_* \to 1$ quand $\tau \to \infty$ et substituons à $\cos\alpha_*$ sa valeur limite $\cos\alpha_* \approx 1$. Les formules (7.2.7), (7.2.8) et (7.2.10) deviennent alors beaucoup plus simples:

$$\rho_* = \frac{1}{\sqrt{f}}, \quad V_* = \sqrt[4]{4f}, \quad \tau_* = \frac{1}{f\,(1+\sqrt[4]{4f})}. \qquad (7.2.11)$$

La comparaison avec les résultats du calcul exact (intégration numérique des équations du mouvement) montre que ces formules donnent les valeurs des paramètres de mise en vitesse avec une erreur de 5 à 15% tout au plus: une telle précision suffit parfaitement pour les calculs estimatifs, le choix de l'orbite à priori, etc. Après avoir retenu une variante quelconque de la trajectoire à l'aide des formules approchées (7.2.11), on peut toujours justifier cette variante, ainsi que des variantes proches de celle-ci, par l'intégration numérique des équations du mouvement.

Afin de passer aux paramètres avec dimensions on doit, après avoir calculé ρ_*, V_* et τ_* d'après (7.2.11), appliquer les formules (7.2.1).

Notons en outre que $V = dS/d\tau$, où S est la distance (sans dimension) parcourue par l'engin. Portons cette expression de V dans la première équation (7.2.5) et intégrons cette dernière. Nous obtenons une relation exacte

$$h - h_0 = f\,(S - S_0) \qquad (7.2.12)$$

d'où il est aisé de déduire l'espace parcouru par le vaisseau. Par exemple, si l'accélération f d'un vaisseau qui quitte l'orbite circulaire ($h_0 = -0{,}5$) est 10^{-4}, la distance (sans dimension) parcourue en phase de mise en vitesse parabolique ($h = 0$) est $S = 0{,}5\cdot 10^4$. Or, $S = S_d/r_0$, où r_0 est le rayon de l'orbite de départ et S_d la distance parcourue, mesurés en unités de longueur. Si $r_0 = 7000$ km, on a $S_d = 35$ millions de km.

*) Voici cette formule:

$$\sin\alpha_* = \frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{4f}\right)^{\frac{2\sqrt{f}}{2\sqrt{f}-1}}.$$

Les tableaux 7.1 à 7.4 ci-après donnent quelques résultats du calcul des paramètres des trajectoires spirales de mise en vitesse. Toutes les valeurs se rapportent à la fin de la phase, c'est-à-dire à l'instant où la vitesse parabolique est atteinte. Les paramètres marqués de l'astérisque ont été calculés d'après les formules approchées (7.2.11); sans astérisque, les paramètres ont été obtenus par l'intégration numérique exacte des équations du mouvement.

Le tableau 7.1 permet également d'évaluer l'exactitude du calcul avec les formules approchées : δ_ρ, δ_V, δ_τ sont les erreurs relatives du calcul d'après ces formules (par exemple, $\delta_\rho = \frac{|\rho_* - \rho|}{\rho}$; il en est de même pour δ_V et δ_τ). Dans la dernière colonne du tableau 7.1 on trouve le nombre des révolutions faites par le vaisseau avant d'atteindre la vitesse parabolique. Tous les paramètres du tableau 7.1 sont sans dimension ; les tableaux 7.2 à 7.4 donnent quelques caractéristiques avec dimension.

L'analyse des tableaux montre que, pour une accélération de l'ordre de 1 mm/s², la phase de la mise en vitesse dure près de 100

Tableau 7.1

Mise en vitesse à partir d'une orbite circulaire

f	τ_*	τ	δ_τ	ρ_*	ρ	δ_ρ	V_*	V	δ_V	α	n
10^{-2}	69,1	75	0,078	10,00	8,939	0,118	0,447	0,473	0,072	37,5	4
$5\cdot10^{-3}$	145	157	0,074	14,14	12,438	0,137	0,375	0,401	0,063	36	8
10^{-3}	799	856	0,066	31,62	27,846	0,135	0,251	0,268	0,068	33	39
$5\cdot10^{-4}$	1651	1758	0,061	44,72	39,506	0,132	0,211	0,225	0,066	32,5	79
10^{-4}	8761	9192	0,047	100,00	87,715	0,139	0,141	0,151	0,066	31,5	398

Tableau 7.2

Mise en vitesse autour de la Terre. Altitude initiale de l'orbite circulaire au-dessus de la surface de la Terre $H_0 = 300$ km

f	f_d, mm/s²	t, jours	r, km	V_d, km/s
10^{-2}	89,5	0,75	56 630	3,65
$5\cdot10^{-3}$	44,7	1,5	82 970	3,10
10^{-3}	8,95	8,5	185 760	2,07
$5\cdot10^{-4}$	4,5	17,5	263 545	1,74
10^{-4}	0,9	92	585 150	1,17

Tableau 7.3

Mise en vitesse autour de la Terre. Altitude initiale de l'orbite circulaire au-dessus de la surface de la Terre $H_0 = 6000$ km

f	f_d, mm/s²	t, jours	r, km	V_d, km/s
10^{-2}	26	2	110 580	2,68
$5 \cdot 10^{-3}$	13	4	153 870	2,275
10^{-3}	2,6	21,5	344 483	1,52
$5 \cdot 10^{-4}$	1,3	44	488 730	1,58
10^{-4}	0,26	232	1 085 120	0,86

Tableau 7.4

Mise en vitesse autour de Mars. Altitude initiale de l'orbite circulaire au-dessus de la surface de Mars $H_0 = 300$ km

f	f_d, mm/s²	t, jours	r, km	V_d, km/s
10^{-2}	31,6	0,93	33 000	1,61
$5 \cdot 10^{-3}$	15,8	2	45 920	1,37
10^{-3}	3,16	11	102 810	0,91
$5 \cdot 10^{-4}$	1,6	22	145 860	0,77
10^{-4}	0,3	115	323 840	0,51

jours pour la Terre et près de 30 jours pour Mars, à condition que cette phase commence à l'altitude de 300 km au-dessus de la surface de la planète correspondante. Les mêmes durées caractérisent la phase de freinage à partir de la vitesse parabolique jusqu'à la vitesse circulaire, suivie de la mise en orbite à 300 km d'altitude. Si l'orbite de départ a une altitude de 6000 km, alors, disposant d'une accélération de l'ordre de 1 mm/s², on atteint la vitesse parabolique au bout d'une quarantaine de jours. (L'utilité des calculs pour les grandes altitudes de l'orbite de départ, de l'ordre de 6000 km, tient au fait que les orbites de ce type sont situées au-delà de la première ceinture de radiations de la Terre. La dépense d'énergie supplémentaire pour la mise en orbite haute sera compensée par la diminution du poids du blindage.)

Citons encore une formule remarquable. Il ressort du tableau 7.1 que la formule

$$n = \frac{0{,}04}{f} \tag{7.2.13}$$

définit admirablement bien le nombre n des révolutions pour la mise en vitesse à partir de l'orbite circulaire. Cette formule est purement empirique ; elle n'a pas pu être justifiée par les moyens analytiques.

Citons, enfin, les résultats du calcul (intégration numérique) de la variation dans le temps des paramètres de la trajectoire de mise

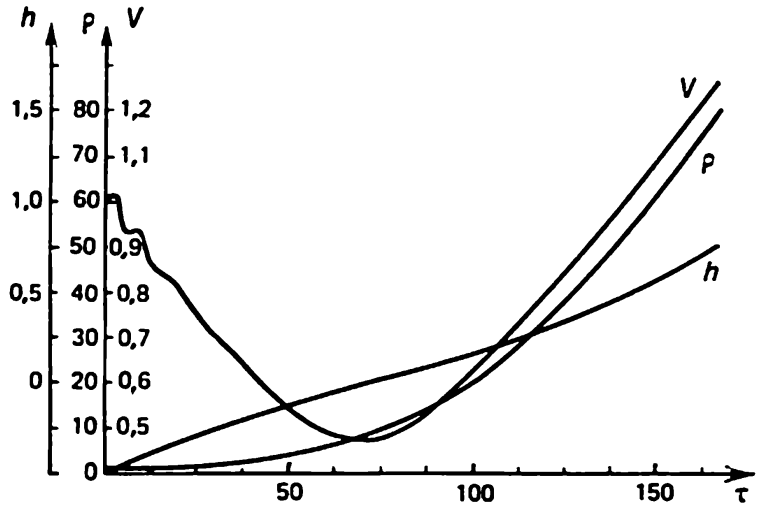


Fig. 7.3. Variation dans le temps des paramètres de la trajectoire de mise en vitesse (variables sans dimension) à partir d'une orbite circulaire ; $f = 0{,}01$

en vitesse (fig. 7.3). Etudions le comportement de la vitesse V. Cette caractéristique se comporte en conformité absolue avec notre analyse qualitative préalable des équations du mouvement : elle diminue en moyenne tant que la vitesse parabolique n'a pas été atteinte, puis, au moment où l'énergie h passe par 0, elle atteint son minimum absolu et, cet instant passé, elle se met à croître de façon monotone.

D'autre part, en regardant bien la figure 7.3, on y remarque des particularités qui n'ont pas été révélées dans notre analyse approchée. Tout d'abord, ce sont de petites variations de la vitesse autour de sa valeur moyenne qui décroît de façon monotone (en phase de mise en vitesse). La variation de l'orbite, elle, est non monotone en général. Si la mise en vitesse commence à partir d'une orbite circulaire, la poussée du moteur fait de l'orbite osculatrice une orbite faiblement elliptique. Or, on sait qu'en orbite elliptique la vitesse et le rayon vecteur varient périodiquement. Superposées à la variation monotone moyenne des paramètres, ces variations

périodiques donnent justement le tableau montré sur la figure 7.3 (on ne distingue pas les oscillations de ρ, à cause de l'échelle de la figure).

3. Une spirale monotone

On peut cependant construire toute une classe de trajectoires dont tous les paramètres varient d'une façon monotone [7.3]. Ecrivons le système d'équations complet en éléments osculateurs pour notre problème :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= f\frac{2p}{V}, & \frac{de}{d\tau} &= f\frac{2(e+\cos\nu)}{V}, \\ \frac{d\omega}{d\tau} &= f\frac{2\sin\nu}{Ve}, & \frac{d\nu}{d\tau} &= \frac{\sqrt{p}}{\rho^2} - f\frac{2\sin\nu}{Ve}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.1)$$

Ici, comme dans le premier essai, e est l'excentricité osculatrice de l'orbite, ω la longitude osculatrice du périgée, ν l'anomalie vraie. Les quantités ρ et V se définissent en fonction des variables introduites au moyen des formules

$$\rho = \frac{p}{1+e\cos\nu}, \qquad V = \sqrt{\frac{1}{p}(1+e^2+2e\cos\nu)}. \qquad (7.3.2)$$

Rappelons que nos variables sont sans dimension.

Faisons à présent un changement de variables :

$$\begin{aligned} V &= (2f)\,\overline{V}, & \rho &= (2f)^{-1/2}\,\overline{\rho}, \\ p &= (2f)^{-1/2}\,\overline{p}, & \tau &= (2f)^{-3/4}\,\overline{\tau}. \end{aligned} \qquad (7.3.3)$$

Maintenant les équations (7.3.1), (7.3.2), considérées par rapport aux variables $\overline{V}$, $\overline{\rho}$, $\overline{p}$, $\overline{\tau}$, se présentent exactement comme si nous avions posé dans (7.3.1) $2f \equiv 1$ et mis $\overline{V}$, $\overline{\rho}$, $\overline{p}$, $\overline{\tau}$ au lieu de V, ρ, p, τ. Et c'est pourquoi, en définissant une trajectoire quelconque pour $2f = 1$ d'après (7.3.1), nous obtenons conformément à (7.3.3) toute une famille de trajectoires pour des f arbitraires.

En ce qui concerne la trajectoire avec $2f = 1$, cherchons, selon l'idée de D. Okhotsimski [7.3], une solution de (7.3.1) telle que $e \to 0$, $p \to 0$ et $\cos\nu \to 0$ pour $\tau \to -\infty$ (dans la suite, nous omettrons de surligner les lettres). Une telle solution s'avère unique. Dans un certain sens, c'est une solution universelle, car elle ne dépend aucunement des données initiales définies à l'avance et correspondant à une distance non nulle du centre d'attraction. Les paramètres de cette solution varient d'une façon monotone jusqu'au moment où la vitesse parabolique est atteinte. L'ellipse osculatrice définissant cette solution est d'autant plus proche de la circonférence qu'elle est petite. Toute orbite initiale répondant à cette solution aura une ellipticité, petite mais déterminée (à condition que l'orbite ne soit pas exagérément grande).

Compte tenu du changement de variables (7.3.3), à la trajectoire universelle décrite correspond une multitude de trajectoires pour lesquelles on a aussi $e \to 0$, $p \to 0$ et $\cos \nu \to 0$ quand $\tau \to -\infty$; ajoutons que la solution se construit de façon à avoir $e = 1$ pour $\tau = 0$.

Nous donnerons le résultat final du calcul [7.3] de la spirale monotone de mise en vitesse. Il y a intérêt à distinguer trois phases successives de mise en vitesse. En première phase, pour p très petit, la trajectoire se définit par la solution asymptotique : des séries suivant les puissances de p. En deuxième phase la trajectoire se définit par intégration numérique, les données initiales étant déduites des formules asymptotiques de la première phase. En troisième phase, p prenant des valeurs élevées, la trajectoire se définit par des séries de puissances de $1/p$. C'est en deuxième phase que la vitesse parabolique ($e = 1$) est atteinte.

Il se trouve qu'en première phase la solution se laisse mettre sous forme de séries suivant les puissances de p^4 :

$$\left.\begin{aligned} e &= p^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k p^{4k}, \quad \cos \nu = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k p^{4k}, \\ \omega &= -3{,}40942 + p^{-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k p^{4k}, \\ \tau &= 1{,}34571 + p^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k p^{4k}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.4)$$

Ces formules s'obtiennent essentiellement en transformant une partie des équations (7.3.1) de façon à avoir

$$\frac{de}{dp} = f_e(p,\ e,\ \cos \nu), \qquad \frac{d \cos \nu}{dp} = f_\nu(p,\ e,\ \cos \nu).$$

Les coefficients ε_k, ν_k, φ_k, τ_k des développements (7.3.4) sont réunis dans le tableau 7.5.

Tableau 7.5

k	ε_k	ν_k	φ_k	τ_k
0	$1{,}0 \cdot 10^0$	$1{,}0 \cdot 10^0$	$-0{,}5 \cdot 10^0$	$-2{,}0 \cdot 10^0$
1	$-6{,}0 \cdot 10^0$	$-3{,}0 \cdot 10^1$	$2{,}75 \cdot 10^0$	$4{,}285714 \cdot 10^{-1}$
2	$3{,}53 \cdot 10^2$	$3{,}177 \cdot 10^3$	$-4{,}835417 \cdot 10^1$	$-5{,}75 \cdot 10^0$
3	$-5{,}0216 \cdot 10^4$	$-6{,}528080 \cdot 10^5$	$4{,}292169 \cdot 10^3$	$3{,}604946 \cdot 10^2$
4	$1{,}271935 \cdot 10^7$	$2{,}162289 \cdot 10^8$	$-8{,}098106 \cdot 10^5$	$-5{,}110699 \cdot 10^4$
5	$-5{,}007378 \cdot 10^9$	$-1{,}051549 \cdot 10^{11}$	$2{,}555165 \cdot 10^8$	$1{,}281759 \cdot 10^7$
6	$2{,}829338 \cdot 10^{12}$	$7{,}073346 \cdot 10^{13}$	$-1{,}204903 \cdot 10^{11}$	$-5{,}010652 \cdot 10^9$
7	$-2{,}173519 \cdot 10^{15}$	$-6{,}303206 \cdot 10^{16}$	$7{,}935154 \cdot 10^{13}$	$2{,}819974 \cdot 10^{12}$

Lorsque p est grand (en troisième phase de mise en vitesse), les développements se présentent comme suit :

$$\left.\begin{aligned} e &= 0{,}76649p + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon'_k p^{-k}, \qquad \cos \nu = \sum_{k=1}^{\infty} \nu'_k p^{-k}, \\ \omega &= -1{,}5708 + p^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi'_k p^{-k}, \\ \tau &= -1{,}611 + \sum_{k=0}^{\infty} \tau'_k p^{-k}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.3.5)$$

Les coefficients ε'_k, ν'_k, φ'_k, τ'_k sont donnés dans le tableau 7.6.

Tableau 7.6

k	ε'_k	τ'_k	φ'_k	ν'_k
0	—	—	$-1{,}30465 \cdot 10^0$	$1{,}53298 \cdot 10^0$
1	$-4{,}58000 \cdot 10^{-1}$	$9{,}16000 \cdot 10^{-1}$	0	0
2	$6{,}80189 \cdot 10^{-1}$	$-2{,}04057 \cdot 10^0$	$-7{,}74093 \cdot 10^{-2}$	$-7{,}40216 \cdot 10^{-1}$
3	$-8{,}45172 \cdot 10^{-1}$	$3{,}38069 \cdot 10^0$	$-3{,}20210 \cdot 10^{-1}$	$5{,}44150 \cdot 10^{-1}$
4	$8{,}85247 \cdot 10^{-1}$	$-4{,}42624 \cdot 10^0$	$1{,}05876 \cdot 10^0$	$-3{,}77374 \cdot 10^{-1}$
5	$-4{,}86283 \cdot 10^{-1}$	$2{,}91770 \cdot 10^0$	$-2{,}39421 \cdot 10^0$	$-1{,}23027 \cdot 10^{-2}$
6	$-9{,}64784 \cdot 10^{-1}$	$6{,}75349 \cdot 10^0$	$4{,}44336 \cdot 10^0$	$8{,}58759 \cdot 10^{-1}$
7	$4{,}43942 \cdot 10^0$	$-3{,}55154 \cdot 10^1$	$-6{,}81926 \cdot 10^0$	$-2{,}41946 \cdot 10^0$
8	$-1{,}10624 \cdot 10^1$	$9{,}95619 \cdot 10^1$	$7{,}74454 \cdot 10^0$	$4{,}80913 \cdot 10^0$
9	$2{,}11182 \cdot 10^1$	$-2{,}11182 \cdot 10^2$	$-2{,}45367 \cdot 10^0$	$-7{,}51642 \cdot 10^0$
10	$-3{,}13216 \cdot 10^1$	$3{,}44538 \cdot 10^2$	$-1{,}89947 \cdot 10^1$	$8{,}38035 \cdot 10^0$
11	$2{,}90194 \cdot 10^1$	$-3{,}48233 \cdot 10^2$	$7{,}31602 \cdot 10^1$	$-1{,}84542 \cdot 10^0$
12	$1{,}76253 \cdot 10^1$	$-2{,}29129 \cdot 10^2$	$-1{,}79535 \cdot 10^2$	$-2{,}32322 \cdot 10^1$
13	$-1{,}71363 \cdot 10^2$	$2{,}39908 \cdot 10^3$	$3{,}41319 \cdot 10^2$	$8{,}44939 \cdot 10^1$
14	$5{,}27883 \cdot 10^2$	$-7{,}91825 \cdot 10^3$	$-4{,}90991 \cdot 10^2$	$-2{,}00619 \cdot 10^2$

Le tableau 7.7 donne les valeurs des fonctions $e\ (p)$, $\cos \nu\ (p)$, $\omega\ (p)$, $\tau\ (p)$ lorsque p varie de 0,10 à 20,0. On y trouve également la valeur de l'énergie double

$$2h \equiv \bar{h} = \frac{e^2 - 1}{p}.$$

La variation de ces fonctions avec p est illustrée aussi sur la figure 7.4. La figure 7.5 montre la variation de la vitesse V, de l'énergie $\bar{h}$ et de la distance ρ en fonction du temps. Enfin, on voit sur la figu-

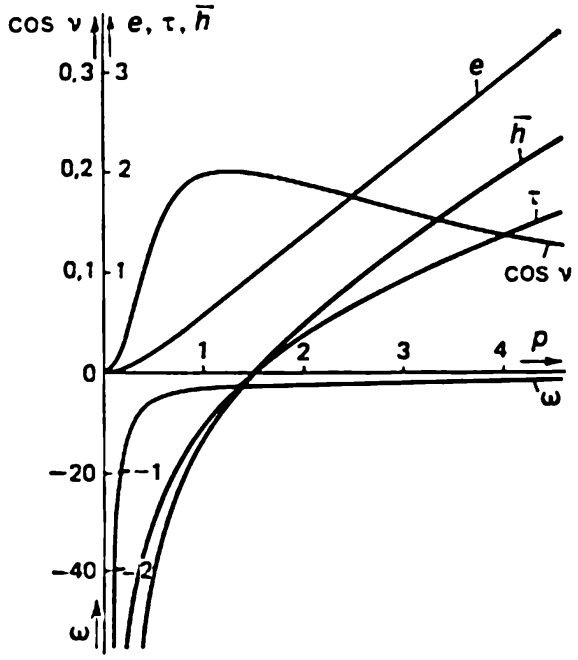


Fig. 7.4. Comportement des éléments osculateurs de la spirale universelle de D. Okhotsimski

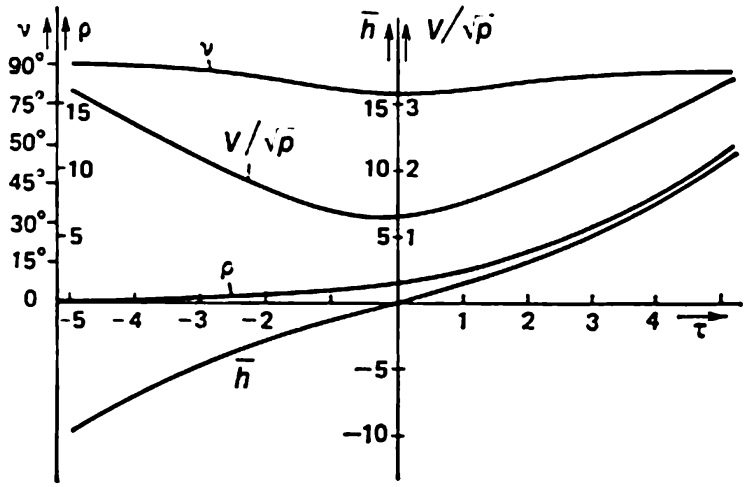


Fig. 7.5. Variation de la vitesse V, de l'énergie $\bar{h}$, de la distance ρ en fonction du temps le long de la spirale universelle

Tableau 7.7

p	e	cos v	ω	τ	$\bar{h}$
0,10	0,009994	0,009970	—53,3820	—4,97871	—9,99900
0,12	0,014382	0,014313	—38,0922	—4,42754	—8,33161
0,14	0,019556	0,019382	—28,8661	—3,99908	—7,14013
0,16	0,025503	0,025128	—22,8710	—3,65360	—6,24594
0,18	0,032207	0,031475	—18,7539	—3,36729	—5,54979
0,20	0,039646	0,038332	—15,8022	—3,12493	—4,99214
0,22	0,047793	0,045597	—13,6115	—2,91623	—4,53507
0,24	0,056615	0,053158	—11,9390	—2,73398	—4,15331
0,26	0,066076	0,060904	—10,6313	—2,57297	—3,82936
0,28	0,076137	0,068730	—9,58789	—2,42927	—3,55073
0,30	0,086757	0,076539	—8,74073	—2,29994	—3,30824
0,32	0,097896	0,084250	—8,04234	—2,18264	—3,09505
0,34	0,109512	0,091795	—7,45886	—2,07556	—2,90590
0,36	0,121566	0,099118	—6,96556	—1,97723	—2,73673
0,38	0,134020	0,106179	—6,54409	—1,88645	—2,58431
0,4	0,146838	0,112949	—6,18056	—1,80226	—2,44610
0,45	0,180027	0,110190	—5,39184	—1,61006	—2,15020
0,5	0,215315	0,142001	—4,93070	—1,45562	—1,90728
0,55	0,251470	0,153636	—4,50292	—1,31363	—1,70321
0,6	0,288902	0,163344	—4,20657	—1,19254	—1,52756
0,7	0,365541	0,178381	—3,73868	—0,98117	—1,23769
0,8	0,443994	0,188657	—3,41258	—0,80437	—1,00359
0,9	0,523513	0,195430	—3,17267	—0,65205	—0,80659
1,0	0,603641	0,199643	—2,98886	—0,51783	—0,63562
1,2	0,764699	0,202929	—2,72567	—0,28806	—0,34603
1,4	0,925942	0,202030	—2,54612	—0,09406	—0,10188
1,6	1,08688	0,198833	—2,41563	0,07546	0,11332
1,8	1,24734	0,194388	—2,31640	0,22720	0,30881
2,0	1,40726	0,189299	—2,23832	0,36543	0,49019
2,2	1,56666	0,183923	—2,17524	0,49306	0,66110
2,4	1,72556	0,178472	—2,12318	0,61211	0,82398
2,6	1,88401	0,173075	—2,07947	0,72406	0,98058
2,8	2,04205	0,167807	—2,04223	0,83004	1,13213
3,0	2,19972	0,162713	—2,01012	0,93090	1,27959
3,5	2,59250	0,150857	—1,94631	1,16480	1,63459
4,0	2,98367	0,140292	—1,89878	1,37817	1,97558
4,5	3,37360	0,130929	—1,86198	1,57570	2,30692
5,0	3,76253	0,122627	—1,83263	1,76056	2,63133
6,0	4,53820	0,108659	—1,78875	2,10061	3,26588
8,0	6,08385	0,088240	—1,73408	2,69644	4,50165

Suite

p	e	$\cos v$	ω	τ	$\bar{h}$
10,0	7,62514	0,074166	—1,70136	3,21638	5,71428
12,0	9,16399	0,063919	—1,67957	3,68410	6,91490
14,0	10,7014	0,056140	—1,66402	4,11294	8,10847
16,0	12,2377	0,050040	—1,65236	4,51134	9,29756
18,0	13,7733	0,045130	—1,64329	4,88505	10,4836
20,0	15,3085	0,041095	—1,63604	5,23819	11,6675

re 7.6 l'allure générale de la spirale en question. Les chiffres portés le long de la trajectoire sont les valeurs de p; la lettre П marque l'instant où la vitesse parabolique est atteinte. En ce point

$$V = 1{,}26846, \quad \rho = 1{,}24259 \text{ *)}.$$

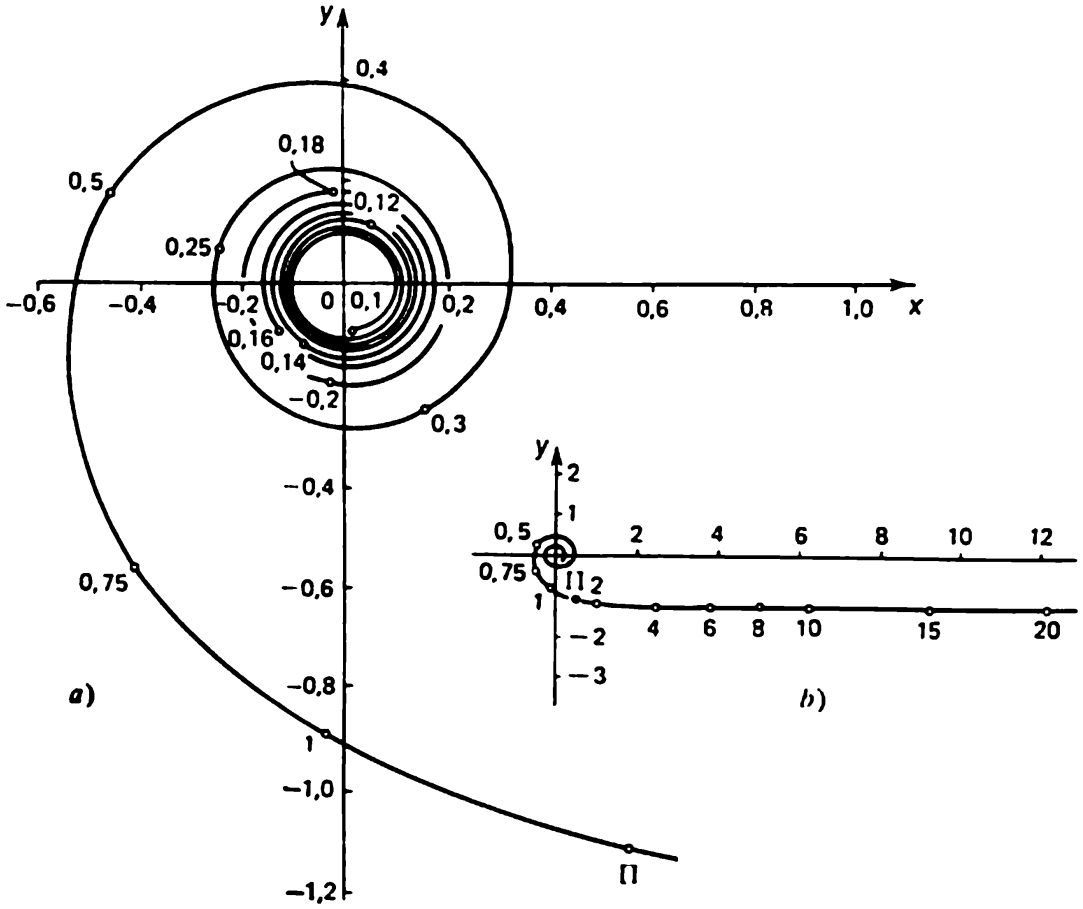


Fig. 7.6. Allure générale de la spirale universelle

*) G. Efimov a fait une série de recherches fort intéressantes sur le calcul de trajectoires analogues mais optimales [7.5].

HUITIÈME ESSAI

DU SOLEIL PLEIN LES VOILES

Sur des mers australes et boréales,
Sur des eaux vertes et houleuses,
Entre des rochers de basalte et de perle
Bruissent les voiles des navires,
Nefs à ailes rapides, guidées par des capitaines,
Explorateurs de nouvelles terres...

N. Goumiliov
Les capitaines

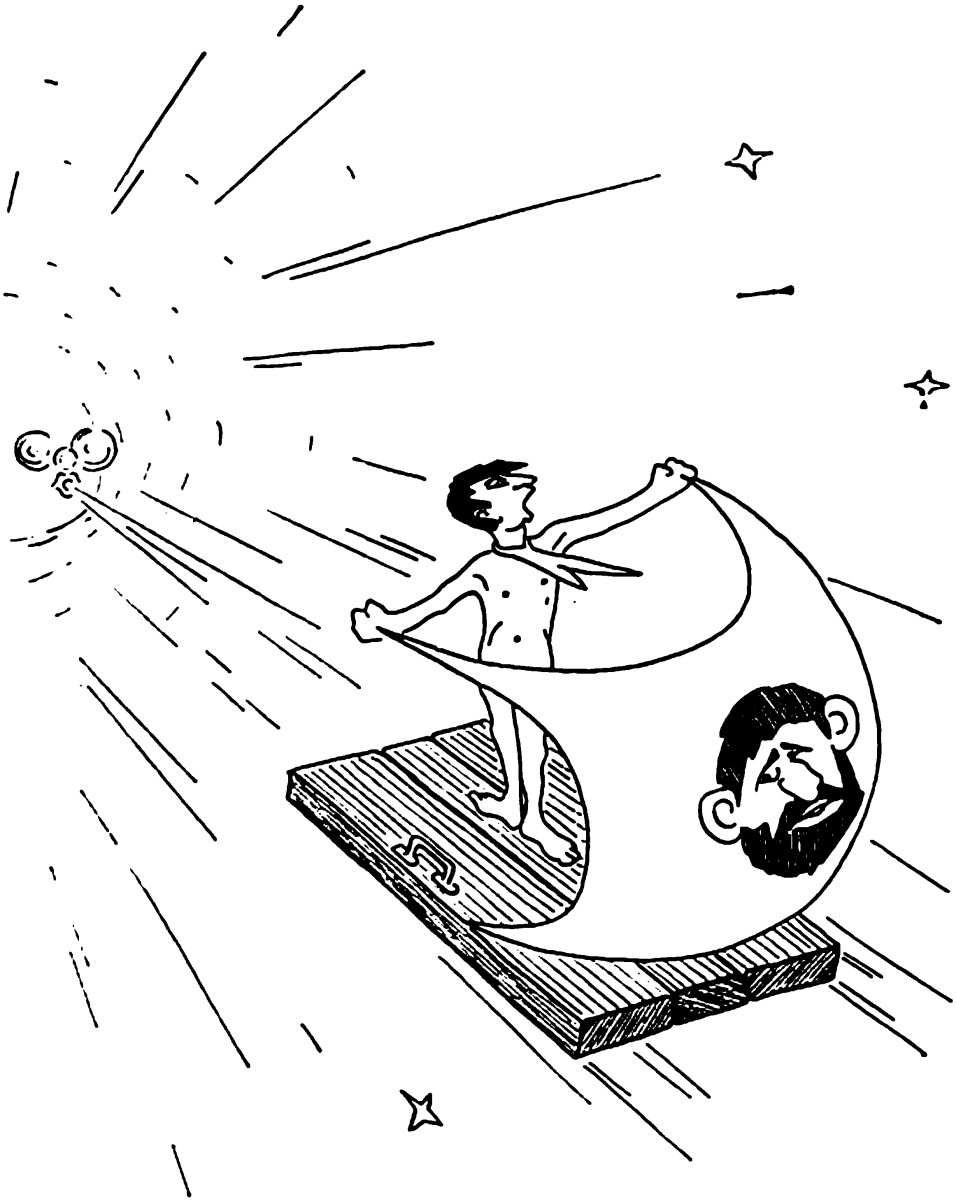
« *Tendez vos mains au Soleil. Que sentez-vous ? La chaleur, bien sûr. Mais il y a aussi la pression. Vous ne vous en rendez même pas compte, tant elle est faible : à peine un millionnième d'once à la surface de vos paumes. Mais dans l'Espace même une quantité aussi négligeable peut devenir importante, parce qu'elle agit tout le temps, chaque heure, chaque jour. Et ce n'est pas comme pour le propergol : elle ne coûte rien et il y en a tant que l'on veut. On a les moyens de l'utiliser. Nous pouvons construire des voiles qui capteront le rayonnement du Soleil.* »

C'est un extrait du *Vent du Soleil*, œuvre de science-fiction d'Arthur Clarke [8.1]. Avec autant de poésie que de rigueur scientifique, l'auteur y décrit la course dans l'Espace des yachts à voile solaire. Nous reviendrons plus d'une fois au texte de cette nouvelle (ces passages sont en italiques). Le présent essai est une sorte de commentaire scientifique à l'œuvre de A. Clarke.

La pression approximative de radiation solaire à l'orbite de la Terre est $p = 4{,}5 \cdot 10^{-8}$ gf/cm^2. C'est une quantité infime. On peut cependant armer l'engin spatial d'une voile suffisamment légère et suffisamment grande : la force cumulée de la pression de radiation solaire sur la voile peut alors communiquer à l'engin une accélération suffisante pour manœuvrer dans l'espace. On peut par exemple, en maniant judicieusement la voile, mettre le vaisseau en vitesse suivant une trajectoire spirale autour de la Terre et, une fois la vitesse parabolique atteinte, s'envoler dans l'espace interplanétaire ! De telles situations sont décrites par exemple dans le livre de G. Grodzovski, You. Ivanov et V. Tokarev [8.2] qui contient une analyse des travaux consacrés à la dynamique du vol à voile solaire.

Dans notre analyse nous nous servirons de l'ouvrage [8.3] de A. Skoptsov *). Si la voile est plane et possède une surface réfléchis-

*) Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à A. Skoptsov qui m'a aidé dans mon analyse et qui a spécialement entrepris des calculs pour le présent essai.



sante idéale, la force résultante de la pression de radiation exercée sur cette voile se définit par la formule

$$P = 2p\,(R_{♁}/R)^2\,S\cos^2\theta = P_*\cos^2\theta \qquad (8.1)$$

et est dirigée suivant la normale **n** au plan de la voile. Dans la formule (8.1) R est la distance du Soleil à la voile, $R_{♁}$ la distance du Soleil à la Terre, S l'aire de la voile, θ l'angle entre les directions de la force résultante et des rayons solaires. Seules seront envisagées, dans le texte qui suit, des orbites circumterrestres pour lesquelles on peut poser $R_{♁}/R = 1$.

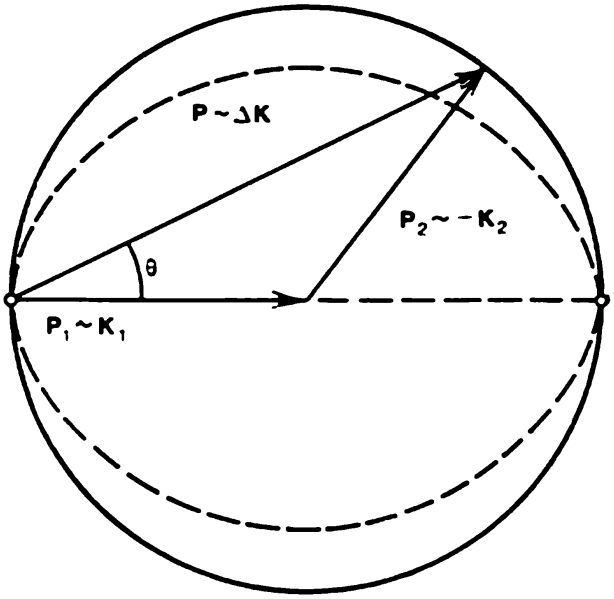


Fig. 8.1. Conditions de la conception optimale de la voile solaire

Cependant la voile n'est pas forcément plane. Notre objectif sera optimal : atteindre la vitesse parabolique aussi vite que possible. Pour le faire on peut non seulement modifier convenablement la position de la voile en vol mais aussi choisir une construction de la voile propre à accélérer autant que possible la mise en vitesse. On peut, certes, manier le mieux possible une voile plane, mais il est beaucoup plus intéressant, du point de vue du temps dépensé, de manier le mieux une voile de conception optimale.

Soient $\mathbf{K}_1$ la résultante générale de la quantité de mouvement du flux de rayonnement incident et $\mathbf{K}_2$ celle du flux de rayonnement réfléchi par la voile. La résultante $\mathbf{P}$ de la pression de radiation est $\mathbf{P} \sim \Delta\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 - \mathbf{K}_2$. La « meilleure conception » de la voile est celle pour laquelle

1° $|\mathbf{K}_1| = |\mathbf{K}_2|$;

2° $|\mathbf{K}_1|$ est indépendant de la direction de $\mathbf{K}_2$.

On a (fig. 8.1) $|\Delta\mathbf{K}| = 2\,|\mathbf{K}_1|\cos\theta$, et la force cumulée de la pression de radiation est une fonction de l'angle θ :

$$P = P_*\cos\theta, \quad -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2. \qquad (8.2)$$

On voit sur la figure 8.1 le diagramme circulaire de variation de la force en fonction de l'angle θ conformément à la loi (8.2) . L'autre diagramme, tracé sur la figure en pointillé, correspond à la voile plane : on remarquera une certaine différence. La construction vraiment « optimale » de la voile n'est pas unique ; une des variantes

possibles est décrite dans [8.3] *). Si la voile « optimale » et la voile plane ont la même poussée maximale P_*, alors, pour tout θ, on peut faire correspondre à la voile « optimale » une voile plane orientée normalement à la poussée **P** de la voile « optimale », auquel cas la voile plane développera une poussée dans la même direction que la voile « optimale » (encore que la poussée de la voile plane sera légèrement plus faible).

Ecrivons l'équation du mouvement en coordonnées polaires φ, r. Supposons que la direction $\varphi = 0$ se confonde avec celle des rayons solaires (fig. 8.2). Le vol étant bref (quelques jours), on peut admettre que le Soleil reste immobile dans l'espace. Designons comme d'ordinaire par u et v les composantes radiale et transversale de la vitesse du vaisseau. En vertu de ce qui précède, la poussée agissant sur le vaisseau est la somme vectorielle de deux forces $\mathbf{P}_1$ et $\mathbf{P}_2$. La force $\mathbf{P}_1$ est constante en intensité et en direction (orientée parallèment aux rayons solaires) ; ses composantes radiale et transversale sont respectivement $\frac{P_*}{2}\cos\varphi$ et $-\frac{P_*}{2}\sin\varphi$. La force $\mathbf{P}_2$ forme un certain angle, par exemple γ, avec la direction radiale. Ses composantes sont $\frac{P_*}{2}\cos\gamma$, $\frac{P_*}{2}\sin\gamma$.

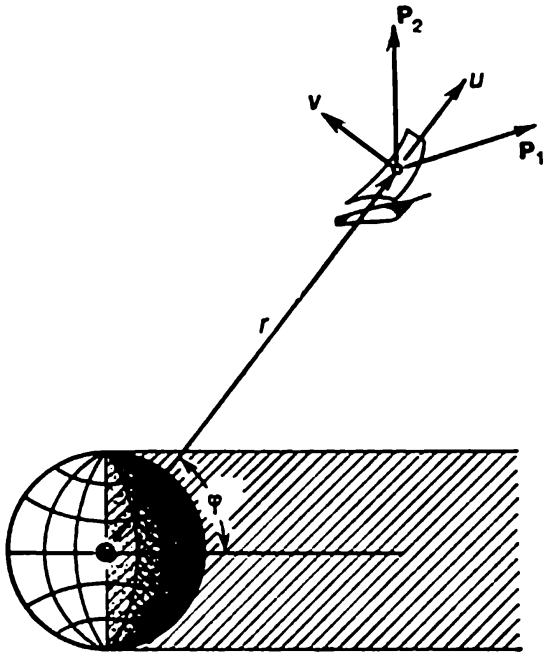


Fig. 8.2. Le système de coordonnées

Désignons par $a_0 = P_*/m$ la plus grande accélération développée par la meilleure voile. Les équations du mouvement s'écrivent ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + \frac{a_0}{2}(\cos\gamma + \cos\varphi)\, f(r, \varphi),\\
\frac{dv}{dt} &= -\frac{uv}{r} + \frac{a_0}{2}(\sin\gamma - \sin\varphi)\, f(r, \varphi),\\
\frac{dr}{dt} &= u,\\
\frac{d\varphi}{dt} &= \frac{v}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

Ici μ est le paramètre gravitationnel de la Terre.

*) Curieusement, cette construction contient un dispositif décrit dans le roman fantastique *L'hyperboloïde de l'ingénieur Garine* d'Alexeï Tolstoï : il s'agit de deux paraboloïdes cofocaux dont les « pavillons » sont tournés l'un vers l'autre et qui ont des distances focales très différentes.

Les équations (8.3) contiennent un facteur très important, à savoir : la « fonction d'ombre » $f(r, \varphi)$. En effet, la pression de radiation ne s'exerce sur la voile qu'en dehors de l'ombre terrestre. Dès que le vaisseau entre dans l'ombre de la Terre, toute pression cesse. Les composantes de la force de pression de radiation sont donc multipliées par la fonction f qui est égale à 0 dans l'ombre de la Terre et à 1 en dehors de l'ombre. Or l'ombre de la Terre est un phénomène compliqué, elle n'a pas de frontière bien délimitée à cause de la pénombre, et, aussi, de la dissipation des rayons dans l'atmosphère terrestre. Il est donc préférable de choisir comme f non pas une fonction « tout ou rien » mais une fonction continue tenant compte d'une façon suffisamment précise des propriétés réelles de l'ombre, par exemple la fonction représentée sur la figure 8.3. A. Skoptsov [8.3] utilise, lui, la fonction

$$f(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \alpha \left(\sqrt{1 - \left(\frac{R_\oplus}{r}\right)^2} - \cos\varphi \right) + \frac{1}{2}, \qquad (8.4)$$

où le choix du paramètre α détermine la vitesse de croissance de la fonction d'ombre pendant la traversée de sa frontière (c'est-à-dire la largeur de la pénombre sur la figure 8.3).

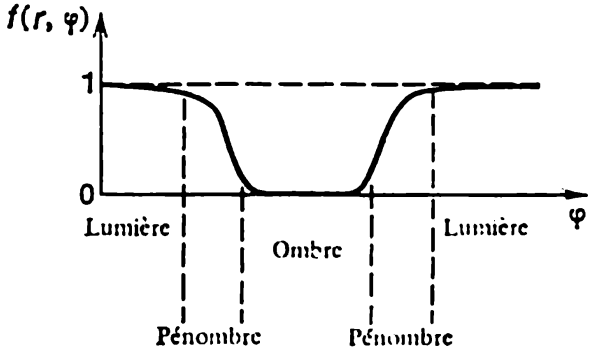


Fig. 8.3. La fonction d'ombre

Les équations (8.3) contiennent une fonction libre $\gamma(t)$. Il convient de la choisir de telle façon que la mise en vitesse parabolique du voilier spatial soit aussi brève que possible. Pareille manœuvre optimale de la voile est analysée dans [8.3]. C'est une fonction assez compliquée. L'auteur de [8.3] montre cependant que le résultat (durée de mise en vitesse) est très voisin de celui qu'on obtient en réalisant ce qu'on appelle la *manœuvre optimale locale* : c'est une commande de $\gamma(t)$ qui donne une croissance maximale de l'énergie $\tilde{h} = u^2 + v^2 - 2\mu/r$ en tout point de l'espace de phase.

Ecrivons la dérivée

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = a_0 f (u \cos\gamma + v \sin\gamma + u \cos\varphi - v \sin\varphi).$$

Elle présente son maximum par rapport à γ lorsque

$$\cos\gamma = u/V, \quad \sin\gamma = v/V, \quad V = \sqrt{u^2 + v^2}. \qquad (8.5)$$

Dans ce cas, la force $\mathbf{P}_2$ est orientée parallèlement au vecteur vitesse du vaisseau et

$$\frac{d\tilde{h}}{dt} = a_0 f (V + V_s), \tag{8.6}$$

où V est le module de la vitesse totale du vaisseau et V_s la projection du vecteur vitesse sur la direction des rayons solaires. Puisque $V + V_s \geqslant 0$, il ressort de (8.6) que l'énergie $\tilde{h}$ croît de façon monotone, ce qui garantit que n'importe quelle valeur de l'énergie sera obtenue tôt ou tard. En particulier, le vaisseau atteindra nécessairement la vitesse parabolique.

Admettons donc que (8.5) soit la manœuvre locale optimale et proposons-nous de considérer les équations du mouvement (8.3), (8.4) dans lesquelles intervient (8.5). Nous obtenons ainsi un problème intéressant de dynamique qui réunit deux problèmes différents que nous connaissons déjà : celui d'un mouvement qui résulte de l'action d'une accélération constante en grandeur et en direction dans l'espace et celui d'un mouvement qui résulte d'une accélération tangentielle constante. Dans le cas considéré les deux accélérations sont égales en valeur absolue.

Les équations du mouvement (8.3) à (8.5) étant établies, nous passons à l'analyse dynamique du texte du *Vent du Soleil* de Clarke.

« *Le vent interplanétaire s'était déjà engouffré dans l'énorme disque de la voile. Les gréements tremblaient. Il ne restait plus que trois minutes avant le départ... L'immense voile était tendue à craquer, sa surface polie étincelait et jouait au Soleil. A Merton, qui nageait en apesanteur autour de son périscope, la voile semblait couvrir tout le ciel. Rien d'étonnant car ses cinquante millions de pieds carrés étaient reliés à la capsule par une centaine de milles de cordages. Cousues ensemble, toutes les voiles de tous les clippers anciens qui fuyaient jadis, tels de blancs nuages, sur la mer des Indes, ne pourraient égaler celle que le* Diane *présentait au vent solaire. Quant au poids, la voile gigantesque contenait à peine plus de matière qu'une bulle de savon : ces deux milles carrés de plastique aluminisé n'avaient que quelques millionnièmes de pouce d'épaisseur.* »

Faisons la conversion : cinquante millions de pieds carrés = = 4,65 km², ce qui correspond à une voile ronde d'un diamètre de 2,4 km ! On ne peut espérer, avec une voile moins grande, obtenir une accélération suffisante pour faire des manœuvres dans l'espace. De surcroît, la voile doit être aussi légère et par conséquent aussi fine que possible : en effet, la force de pression est proportionnelle à l'aire de la voile, mais l'accélération est le quotient de cette force par la masse du vaisseau, voile comprise. La diminution du poids de la voile est donc un problème important. C'est précisément la

création d'une voile de grande étendue et de faible épaisseur qui constitue le plus grand problème technique du vol à voile solaire.

La voile du *Diane*, malgré l'épaisseur insignifiante (de l'ordre d'un dix-millième de millimètre), devrait peser 700 à 1000 kgf ! (La feuille de plastique aluminisé a un poids spécifique de $1{,}2 \cdot 10^3$ kgf/m^3.) La bulle de savon dont parle Clarke devrait évidemment avoir à peu près la même taille que la voile... Si le poids du reste du vaisseau (les agrès, la capsule, le cosmonaute...) est de 1 à 1,5 tonne, l'accélération communiquée au vaisseau peut atteindre dans les $10^{-3}g$. Ce sont justement des yachts de cette « classe » qui participent aux courses décrites par Clarke. Il y en a sept, et leur course est pleine de dramatisme. Mais nous n'allons pas décrire ici les péripéties du vol et l'aventure de John Merton, valeureux capitaine du *Diane*. C'est la mécanique du vol qui nous préoccupe, et il nous suffira de suivre le mouvement d'un ou de deux yachts.

« *Sur les quatre planètes habitées, on comptait moins d'une vingtaine d'hommes capables de maîtriser le yacht solaire, et ces hommes étaient tous là, à la ligne de départ ou à bord des vaisseaux d'accompagnement, orbitant ensemble à vingt-deux mille milles au-dessus de l'équateur.* »

L'orbite de départ est probablement circulaire. De plus, c'est une orbite synchrone : la période de révolution du satellite en orbite synchrone est égale à la période de rotation de la Terre sur elle-même, soit à 24 h. Un satellite mis en orbite synchrone équatoriale se trouve « suspendu » d'aplomb à un même point géographique de la Terre. Le rayon de l'orbite circulaire synchrone est $r_0 \approx 42\,190$ km. Le rayon de la Terre étant $R_♁ \approx 6370$ km, on conçoit que la hauteur de l'orbite au-dessus de la surface de la Terre soit $h = 35\,820$ km, ou 22 260 milles : les vingt-deux mille milles dont parle Clarke ! Un peu plus tard, l'auteur précise qu'il s'agit effectivement d'une orbite de 24 h. Nous prendrons donc comme données initiales pour l'intégration des équations du mouvement (8.3)-(8.5) les données qui correspondent à l'orbite circulaire synchrone :

$$r_0 = 42\,188 \text{ km}, \quad u_0 = 0, \quad v_0 = \sqrt{\mu/r_0} \tag{8.7}$$

(on sait que la dernière formule est celle de la vitesse circulaire en orbite de rayon r_0). L'angle initial φ_0 sera choisi un peu plus tard.

« *Sept couteaux étincelants coupèrent les sept minces cordes qui reliaient les yachts aux vaisseaux-mères d'assemblage et de service. Jusqu'à cet instant ils avaient gravité en bon ordre autour de la Terre ; maintenant ils allaient se disperser comme les graines de pissenlit emportées par la brise. Vaincra celui qui traversera le premier l'orbite de la Lune.*

Apparemment rien ne changea à bord du Diane. *Mais Merton, lui, savait. Bien que son corps ne ressentit aucune secousse, la planche*

de bord annonça que l'accélération approchait le millième de g. Un indice ridicule pour une fusée spatiale, mais pour le yacht solaire c'était un record. Le Diane *était savamment dessiné, sa voile géante justifiait tous les espoirs de Merton. Avec cette accélération, il développera en deux révolutions une vitesse suffisante pour pouvoir quitter l'orbite circumterrestre. Puis, toute la force du Soleil derrière lui, il mettra le cap sur la Lune.* »

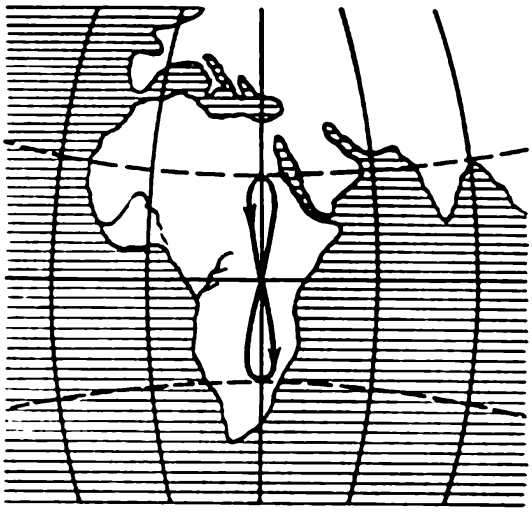


Fig. 8.4. Trajectoire d'un satellite écliptique de 24 h

Le point d'arrivée étant la Lune, il est logique de supposer que la course a lieu dans le plan de l'orbite lunaire (ou approximativement dans le plan de l'écliptique.) Admettons que l'orbite synchrone de départ fût, elle aussi, dans ce plan. La phrase sur les yachts passant au-dessus de l'équateur ne contredit pas cette hypothèse: on peut supposer qu'à l'instant décrit la trajectoire de vol des yachts traversait justement l'équateur. La figure 8.4 donne la forme approximative de la trajectoire d'un satellite écliptique de 24 h, c'est-à-dire la trace de son rayon vecteur à la surface de la Terre.

Du passage cité il ressort également qu'on doit poser dans les équations (8.3)

$$a_0 = 0{,}001g, \tag{8.8}$$

car telle est (à peu près) l'accélération maximale du *Diane* communiquée par la pression de radiation solaire (il s'agit certainement dans le texte de cette accélération et non de l'accélération produite par l'effet cumulé des forces de pression de radiation et des forces de gravité).

La position initiale des yachts en orbite synchrone sera déterminée par l'angle

$$\varphi_0 = -\pi/2. \tag{8.9}$$

La valeur de φ_0 (8.9) ressort sans ambiguïté de l'analyse de l'information contenue dans le texte de Clarke ; nous le verrons par la suite.

Les données (8.7)-(8.9) suffisent pleinement à intégrer numériquement les équations du mouvement (8.3)-(8.5). La figure 8.5 illustre le résultat de l'intégration, c'est-à-dire la trajectoire parcourue par le yacht de John Merton. Remarquons qu'avant d'atteindre la vitesse parabolique, le *Diane* aura fait un peu plus de deux révolu-

tions autour de la Terre, exactement comme l'indique Clarke dans le passage que nous venons de citer.

Il est vrai que, dans un autre passage, l'auteur pêche-t-il par l'inéxactitude lorsqu'il dit : « *Dans deux jours la vitesse de libération sera atteinte* », et la nouvelle est basée tout entière sur l'hypothèse que la mise en vitesse dure à peu près deux jours. En réalité John

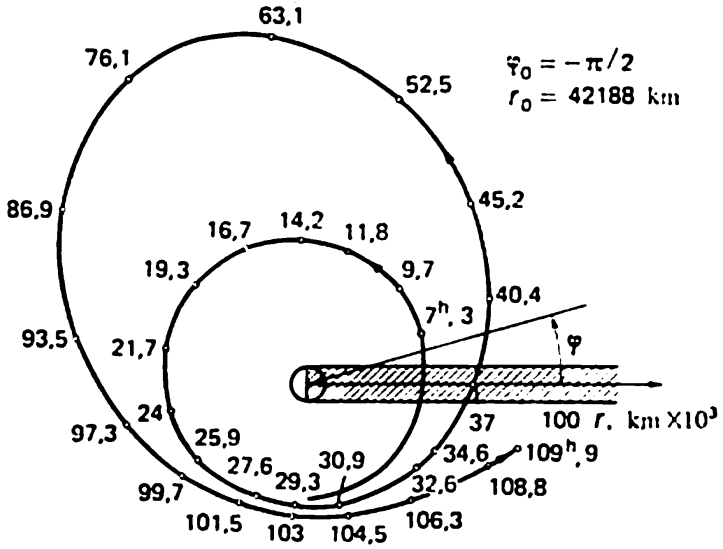


Fig. 8.5. Trajectoire du *Diane*

Merton y mettra près de 120 heures, soit cinq jours (voir la figure où les chiffres affectant la trajectoire indiquent la durée en heures).

La première révolution dure près de 30 heures (un peu plus d'un jour), le reste du temps de vol étant occupé par la deuxième révolution très allongée...

Il n'est pas possible de diminuer sensiblement la durée du vol car, comme nous l'avons signalé, notre programme de vol est très proche du programme optimal où la mise en vitesse est aussi brève que possible. Pardonnons cependant à Clarke son chronométrage un peu flou : *Le Vent du Soleil* n'est pas une thèse de doctorat mais une œuvre de science-fiction, où la rigueur scientifique n'est pas le premier objectif. En revanche, les autres détails de la narration sont autant de perles d'authenticité :

« *Le* Diane *est bien parti ; on pouvait maintenant jeter un coup d'œil sur les adversaires... Les voilà, pareils à d'étranges fleurs argentées au milieu des champs noirs du cosmos... Le* Sunbeam, *de la République de Mars, avait la forme d'un anneau plat, percé en son centre d'un trou d'un demi-mille de diamètre ; l'anneau tournait lentement, et la force centrifuge assurait sa stabilité. L'idée était ancienne, mais personne n'avait réussi à la matérialiser. Merton pouvait jurer que l'équipage*

allait se donner toutes les peines du monde à braquer la voile au bon moment.

Il restait cependant six heures encore avant la fin du premier quart du vol majestueux et lent des voiliers sur leur orbite de vingt-quatre heures. En attendant, au tout début de la course, ils avaient tourné pour ainsi dire le dos au Soleil. L'important était de tirer le maximum de cette bordée, avant de contourner la Terre et d'avoir le Soleil debout. »

Six heures pour le premier quart de vol, ou pour le changement de l'angle polaire φ de 90° : un chiffre à peu près exact. S'il n'y

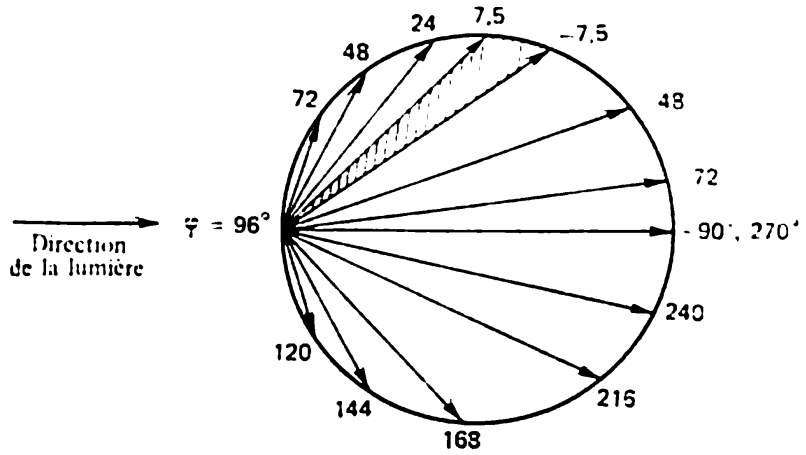


Fig. 8.6. Hodographe de l'accélération perturbatrice du *Diane*

avait pas la voile, il serait absolument précis. Les variations de l'orbite en phase initiale à cause de la voile ne peuvent pas être très grandes : elles n'ont simplement pas le temps de s'accumuler. Compte tenu de l'effet de la voile, le premier quart de révolution dure près de 6 heures 5 minutes. Quant à « tirer le maximum de cette bordée », il est vrai qu'en phase initiale l'accélération due à la pression de radiation est maximale ou presque, la voile étant à peu près normale aux rayons du Soleil. On voit sur la figure 8.6 l'hodographe de l'accélération de la pression de radiation solaire le long de la trajectoire du *Diane*. Sa voile plane doit rester en permanence normale au vecteur accélération tracé sur la figure.

Entre le moment du départ ($\varphi = -90°$) où la voile était normale aux rayons et l'accélération de poussée était maximale ($a_0 = 0{,}001\ g$) et le moment de l'entrée dans l'ombre terrestre ($\varphi = -7°{,}5$) la voile n'aura tourné que d'un angle inférieur à 40°, la perte de poussée n'étant que de 20% (jusqu'à $0{,}8a_0$).

« *...Les petits cabestans tournaient sans cesse, tantôt pour dévider les câbles, tantôt pour les enrouler, tandis que le pilote automatique tenait la voile sous un angle correct par rapport au Soleil...*

...On ne voyait presque plus la Terre, seul brillait un arc étroit qui progressait inexorablement vers le Soleil. A côte de l'arc étincelant se

dessinait faiblement dans la pénombre la face nocturne de la planète; çà et là, les feux des grandes villes perçaient à travers les nuages. Le disque opaque avait déjà occulté une bonne partie de la Voie lactée. Dans quelques minutes il aura commencé à masquer le Soleil.

La lumière baissait; à mesure que le Diane *s'enlisait sans bruit dans l'ombre de la Terre, la voile prenait une teinte pourpre crépusculaire, reflet de multiples couchers du Soleil éloignés de milliers de milles. Le Soleil sombra derrière l'horizon invisible et quelques minutes plus tard ce fut la nuit.*

Merton jeta un regard en arrière sur l'orbite: il avait déjà fait un quart de son chemin autour du monde. Les étoiles brillantes des autres yachts s'éteignaient une à une comme ils plongeaient à sa suite dans la nuit qui n'allait pas durer. Une heure s'écoulerait à peine que le Soleil réapparaîtrait de derrière l'immense bouclier noir; mais d'ici là ils resteraient tous impuissants, volant par inertie. »

Ainsi donc, avant de sombrer dans l'ombre terrestre, les yachts ont fait un quart de révolution : or, c'est justement la valeur initiale (8.9) de φ_0, égale à —90°, que nous avions prise pour l'intégration des équations du mouvement. Plus exactement, nous aurions dû prendre $\varphi_0 = -97°,5$, afin de parcourir exactement un quart de révolution avant l'entrée dans l'ombre, car le déplacement angulaire des yachts entre le commencement et la fin de l'ombre est d'environ 15°. Mais ne soyons pas tatillons dans cette reconstitution du déroulement de la course : l'auteur ne dit pas que le yacht a parcouru *exactement* un quart de révolution avant d'entrer dans l'ombre. Supposons donc que ce fut un quart *à peu près* : cela n'a pas tellement d'importance (pour nous en persuader, nous avons tout de même entrepris un calcul avec $\varphi_0 = -97°,5$). Remarquons en outre que la durée de parcours de la zone d'ombre est effectivement de 1 heure comme il est dit dans le texte ; une heure plus tard, le yacht réapparaît dans la lumière du Soleil...

« *A partir de cet instant et tout au long de la presque moitié de l'orbite circumterrestre, il devra tenir cette immense surface de profil au Soleil. Pendant les douze ou quatorze heures qui suivront, la voile ne sera qu'un inconvénient: le yacht fonçant droit sur le Soleil, les rayons risquent de le rejeter en arrière.* »

Reprenons le diagramme des accélérations du *Diane* en première révolution (fig. 8.6). Dans la majeure partie de la demi-révolution en orbite le plan de la voile est en effet presque parallèle aux rayons du Soleil. C'est ainsi que, de $\varphi = 48°$ à $\varphi = 144°$ l'inclinaison du plan de la voile sur la direction du flux de lumière ne dépasse pas 20°. Sur une grande partie de l'orbite, de $\varphi = 24°$ à $\varphi = 168°$, où la course va plus ou moins « Soleil debout », cette inclinaison est de 35 à 45° tout au plus : cette partie de l'orbite est franchie en 14 heu-

res. En toute rigueur, il n'y a qu'un seul point ($\varphi = 96°$) où la voile se présente de profil vis-à-vis du Soleil : en ce point la poussée est nulle.

« *Dommage qu'on ne puisse pas rentrer complètement la voile en attendant.* »

Erreur. Sans voile, l'apport d'énergie aurait immédiatement cessé, tandis qu'avec la voile l'énergie croît de façon monotone, bien que lentement.

Notons que le caractère général de la manœuvre optimale locale de la voile est très semblable à une manœuvre élémentaire qui con-

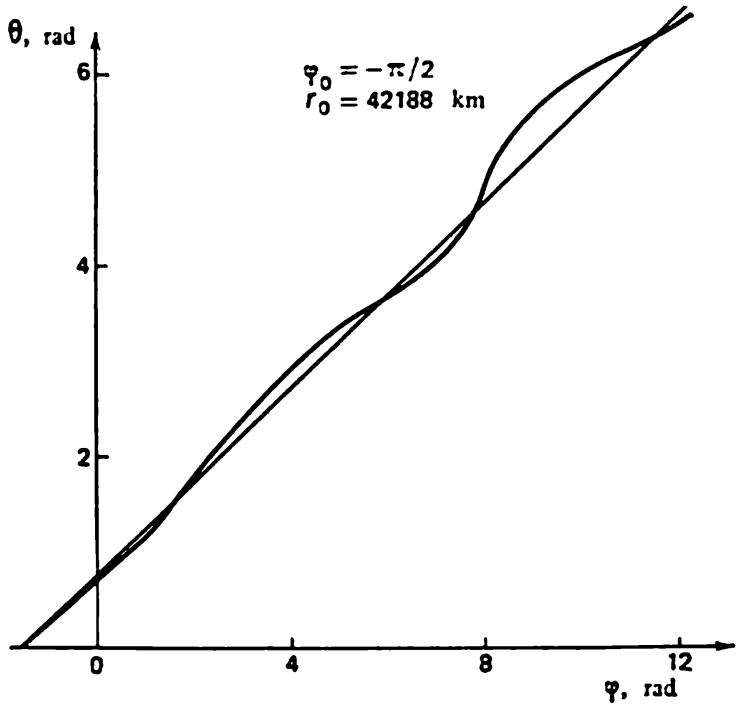


Fig. 8.7. Manœuvre de la voile le long de la trajectoire du *Diane*

siste à la braquer sans cesse dans le sens de mouvement du vaisseau mais avec une vitesse angulaire deux fois inférieure. Autrement dit, si θ est l'angle entre la normale à la voile et la direction des rayons du Soleil, la manœuvre optimale locale est proche de celle-ci:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \tag{8.10}$$

On suppose que les deux faces de la voile ont même pouvoir réfléchissant, sans quoi l'on aurait dû remplacer (8.10) par une relation analogue linéaire par morceaux en φ.

La figure 8.7 montre la variation de la fonction $\theta(\varphi)$ pour la trajectoire du *Diane*. On voit que les écarts par rapport à la loi (8.10) ne dépassent guère 5°.

« ...Quelques minutes plus tard, il ne resta que quatre participants au lieu de cinq. Merton s'était montré sceptique dès qu'il avait vu le Sunbeam, *et maintenant ses doutes se justifièrent.*

Le yacht martien s'avéra rebelle à la manœuvre: la rotation l'a rendu trop stable. Au lieu de se tourner de profil au Soleil, le gigantesque anneau offrit à l'astre sa face, et la pression de radiation repoussait maintenant le yacht avec la plus grande accélération. »

Pour simplifier le raisonnement, admettons que la voile du *Sunbeam*, trop stable, a conservé une position absolument inchangée dans l'espace. Le vecteur accélération provenant de la pression de

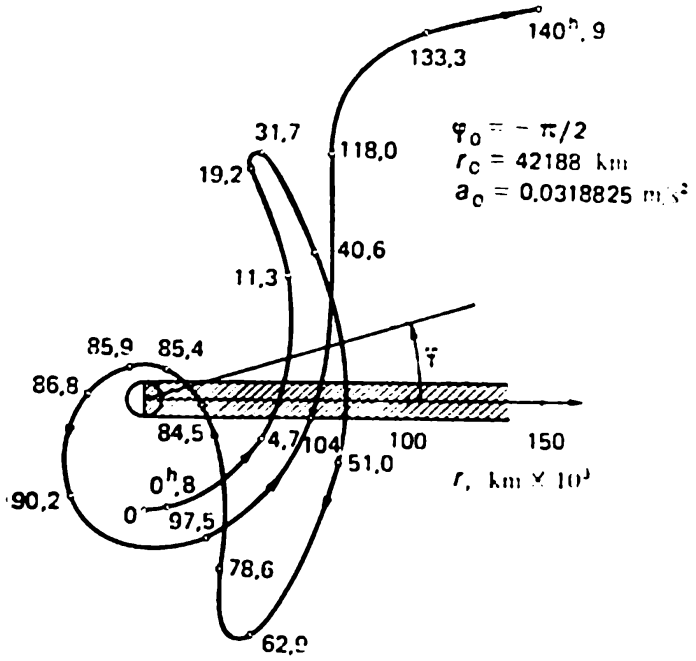


Fig. 8.8. Trajectoire du *Sunbeam*

radiation est alors constant en grandeur et en direction. Or, nous avons déjà étudié un tel problème [8.4, 8.5] dans notre troisième essai et nous avons vu qu'il existe vraiment des trajectoires qui « rebroussent chemin », par exemple la trajectoire de la figure 3.15. Si l'équipage du *Sunbeam* n'arrive pas à maîtriser sa voile, l'énergie cessera de croître et le vaisseau n'atteindra pas la vitesse parabolique ; il ne lui restera qu'à « se balader » aux environs de la Terre suivant une trajectoire bornée, du type de celle qui est montrée sur la figure 3.15.

Nous avons montré aussi, dans le troisième essai, que le type de la trajectoire est déterminé dans ce cas par la valeur des constantes

c, $h/\sqrt{f}$ (fig. 3.4). Pour nos données initiales (8.7)-(8.9) nous aurons

$$c = -\frac{1}{2} f = -\frac{a_0}{2g\left(\frac{R_{\text{♁}}}{r_0}\right)^2} \approx -0{,}022,$$

$$h \quad -0{,}5, \quad h/\sqrt{f} = -0{,}5/\sqrt{0{,}044} = -2{,}380.$$

Ce point du plan c, $h/\sqrt{f}$ se situe précisément dans le domaine des trajectoires « serpentiformes » bornées: autrement dit, le *Sunbeam* sera littéralement emporté par le courant des rayons solaires avant de pouvoir faire une seule révolution autour de la Terre ! (Le fait que ce yacht ait pénétré une fois dans l'ombre terrestre n'a aucune importance en l'occurrence.) La figure 8.8 montre la trajectoire calculée d'un tel yacht (mais pour une plus grande valeur de l'accélération maximale a_0).

Il faut dire que même une manœuvre judicieuse de la voile ne garantit pas l'absence de pareils incidents. Si le point de départ sur l'orbite circulaire a été mal choisi, il peut arriver que le vaisseau se déplace suivant sa trajectoire de mise en vitesse à la rencontre du Soleil; la durée de la mise en vitesse peut facilement doubler! On voit sur la figure 8.9 ce que deviendrait le yacht de John Merton s'il partait du point $\varphi_0 = -135°$ de l'orbite circulaire. Il est curieux qu'en commençant la mise en vitesse dans l'ombre de la Terre ($\varphi_0 = 0$), on aurait pu gagner près de 10 heures en comparaison avec le cas de $\varphi_0 = -90°$. La variation de la durée de la mise en vitesse en fonction du point de départ (en cas de manœuvre optimale locale) est illustrée sur la figure 8.10.

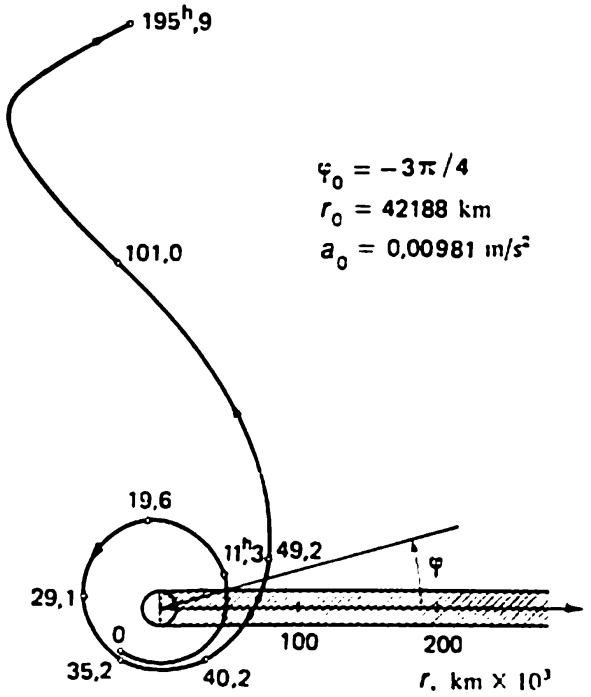


Fig. 8.9. La mise en vitesse à la rencontre du Soleil. La largeur de l'ombre terrestre est exagérée pour la clarté du dessin

Revenons cependant à nos courses.

« *Tout se réduisit donc finalement à ce duel entre le* Diane *et le* Lébédev... *Mais, à vrai dire, Merton voyait mal comment le* Lébédev *allait rattraper le* Diane; *il n'empêche qu'il demeura nerveux pendant*

toute la deuxième révolution, de l'éclipse à la longue dérive paresseuse contre le Soleil.

Il connaissait les pilotes et les ingénieurs russes. Depuis vingt ans, sans jamais y arriver, ils s'efforçaient de la gagner, cette course, ce qui, après tout, était normal: n'était-ce pas Piotr Nikolaiévitch Lébédev qui avait découvert la pression de radiation solaire, encore au tout début du vingtième siècle.

Il fallait croire que Dmitri (Markov, le capitaine du *Lébédev.— V. B.*) *avait plus d'un tour dans son sac, et qu'il allait justement montrer quelque chose de sensationnel...*

Sauf imprévu, ce serait le dernier tour, pour lui et pour les Russes. Puisant l'énergie dans les rayons du Soleil. ils avaient remonté la

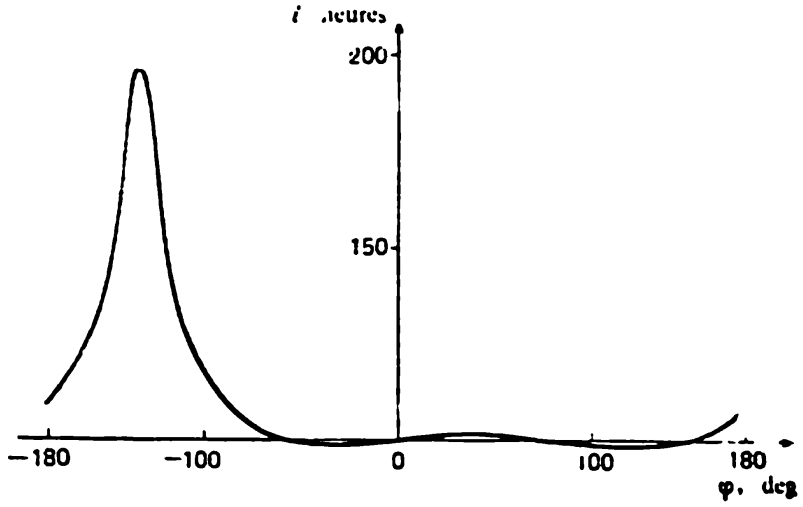


Fig. 8.10. Variation de la durée de la mise en vitesse en fonction du point de départ choisi sur l'orbite synchrone

spirale à des milliers de milles d'altitude. Après la dernière bordée ils auront vaincu l'attraction terrestre et se seront lancés dans leur longue course vers la Lune... Heureusement, toutes les manœuvres délicates étaient terminées, le Diane *allait avoir toujours le vent dans le dos. Et, comme disaient les vieux marins, on maîtrise sans peine son navire quand le vent vous souffle dans le dos...* »

Le lecteur ne cesse de s'étonner de l'authenticité de la description. On voit sur la figure 8.5 qu'à l'instant où le *Diane* a atteint la vitesse parabolique, son vecteur vitesse faisait un angle d'environ 25° avec la direction des rayons solaires, et son vecteur poussée, un angle encore plus petit (près de 15°). Le vaisseau s'éloignant de la Terre, ces angles ne peuvent que diminuer: le yacht aura « le vent dans le dos ». Nous savons cependant que la phase finale de la mise en vitesse ne se place pas toujours sous un vent favorable: il suffit de choisir mal son point de départ sur la trajectoire circulaire pour avoir le vent debout.

« Et c'est après quarante-neuf heures de course, alors qu'ils finissaient la deuxième révolution, que Markov lui réserva une surprise.

— Allô, John, dit-il d'un ton nonchalant dans le réseau interyachts. Viens voir, ça t'amusera.

Merton se laissa glisser près du périscope et mit le grossissement maximum. Dans le champ de vue se dessinait la croix de Malte toute étincellante du Lébédev, *petite mais très nette, vision impossible sur le fond des étoiles. Soudain les quatre bras de la croix se détachèrent de l'âme carrée pour disparaître dans l'espace avec leurs cordages et mâtures.*

Markov largua toutes les masses inutiles, car il avait déjà atteint la vitesse de libération et n'avait plus besoin de tournoyer patiemment autour de la Terre pour emmagasiner de l'énergie. A partir de cet instant le Lébédev *devenait presque non gouvernable, mais cela n'avait déjà aucune importance, vu que toutes les manœuvres difficiles étaient faites. C'était un peu comme si le yachtman du passé délestait à dessein son bâteau du gouvernail et de la lourde quille, sachant pertinemment que le bon vent et la mer calme allaient l'accompagner jusqu'à l'arrivée. »*

Nous avons déjà relevé l'inexactitude du chronométrage (« après quarante-neuf heures de course... »). Une autre question se pose maintenant : la manœuvre de Markov — le largage d'une partie de la voile — est-elle aussi efficace que spectaculaire ? (Notons que la partie carrée de la voile est restée en place.) L'auteur nous tend la perche en remarquant que les « yachtmen du passé » avaient l'habitude de larguer la lourde quille et non le propulseur (la voile). Il faut dire que Markov a jeté dans l'Espace non seulement son excédent de voile mais aussi son coéquipier (le vaisseau d'accompagnement le ramassera...)

« Merton... faisait des calculs rapides avec les données qu'il avait sur le Lébédev. *Au moment où il termina, il comprit que l'issue de la course était tout à fait incertaine. »*

Il serait extrêmement intéressant de faire ces calculs avec Merton. L'accélération du yacht de Markov augmentera-t-elle ? Nous laissons au lecteur le soin de résoudre ce problème lui-même.

NEUVIÈME ESSAI

LE GRAVIDYNE

> ... La jauge disait qu'il ne restait pas une goutte de combustible dans le réservoir... Krug resta un moment immobile dans l'espace pour se faire à cette idée. Pas de combustible. Bon. Mais alors, comment diable allait-il regagner le vaisseau? Et soudain il réalisa que peut-être ne le regagnerait-il jamais...
>
> ... C'est alors qu'il fit un autre geste de désespoir, dénué de toute logique il fit ce qu'on fait quand on se noie: il se mit à nager. Il nageait, bien que ce fût parfaitement stupide: nager dans le vide sans aucun point d'appuit. Il jetait les bras en avant et faisait des mouvements de jambes comme le font les nageurs. Le squammer, docile, brassait le vide de ses larges paumes blindées, remuait ses jambes lourdes: il nageait...
>
> *V. Mikhaïlov*
> *Parmi les étoiles*

1. Attraction d'un corps de dimensions finies

Il n'est en général aucun besoin de rappeler que le satellite mis en orbite autour de la Terre est un corps et non un point matériel. En calculant les orbites, on oublie cette différence le plus souvent. Mais le fait est là: la force d'attraction de la Terre ne s'exerce pas de la même façon sur un corps et sur un point matériel de la même masse que le corps et situé à la même distance du centre de la Terre que le centre de masse du corps. Ce fait évident mais facilement omis peut donner lieu à des conséquences surprenantes !

Considérons par exemple un satellite ayant la forme d'un haltère (fig. 9.1), constitué de deux boules identiques de masse $m/2$ chacune, reliées par une barre de masse négligeable. Supposons que la barre soit perpendiculaire à l'axe reliant le centre de l'haltère au centre de la Terre. Soient r la distance du centre de masse du satellite (c'est-à-dire du milieu de la barre) au centre de la Terre, l la demi-longueur de l'haltère, $R = \sqrt{l^2 + r^2}$ la distance de la boule au centre de la Terre. Chaque boule subit l'action d'une force newtonienne définie par des fonctions de forces $U_1 = U_2 = \mu m/2R$. La

fonction de forces totale est

$$U = \frac{\mu m}{\sqrt{l^2 + r^2}} = \frac{\mu m}{r\sqrt{1+\alpha^2}}, \quad \alpha = \frac{l}{r}. \tag{9.1.1}$$

A moins que le satellite ne soit un supergéant, la quantité α (et à fortiori α^2) est extrêmement petite : il suffit de comparer $l = 7$ m et $r \sim 7\,000\,000$ m. La fonction de forces U est donc proche de la fonction de forces $U_n = \mu m/r$ qui définit l'attraction exercée par la Terre sur un point matériel de masse m placé au centre de masse de l'haltère en question.

Chaque boule subit la force newtonienne

$$F_l = \frac{\mu m}{2R^2} = \left| \frac{\partial U_l}{\partial R} \right|. \tag{9.1.2}$$

Chacune des forces $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ est dirigée vers le centre de la Terre. La résultante de ces forces, déterminée à l'aide du parallélogramme des forces (fig. 9.1). est égale en module à

$$F = \left| \frac{\partial U}{\partial r} \right| = \frac{\mu m}{r^2} \frac{1}{(1+\alpha^2)^{3/2}}. \tag{9.1.3}$$

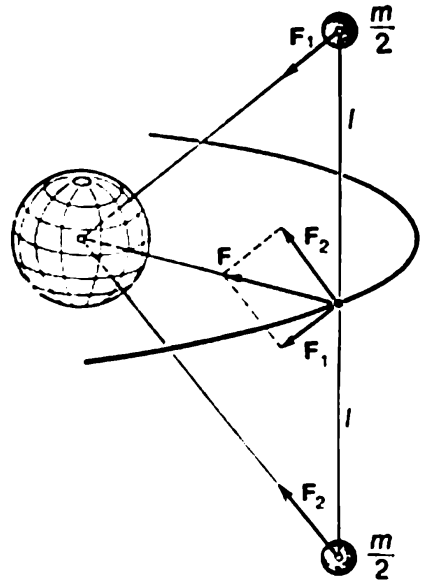


Fig. 9.1. Attraction de l'haltère par un centre newtonien

Notre résultante $\mathbf{F}$, orientée vers le centre d'attraction, s'avère presque égale en module à la force newtonienne « ordinaire » $F_n = \mu m/r^2$. Presque, mais pas tout à fait ! La force F est plus petite que F_n. En d'autres termes, le fait que le corps soit très allongé apporte pour ainsi dire une répulsion radiale additionnelle. Pratiquement insensible sur les petits satellites, cette force additionnelle existe néanmoins ! Sur un grand satellite, elle peut devenir plus prononcée. Et c'est précisément ce fait qui a été mis à la base d'un nouveau procédé de déplacement dans l'espace lequel a été proposé par l'auteur de ce livre et par M. Guiverts [9.1, 9.2]. (J. F. Schaefer a avancé une idée analogue dans un travail indépendant [9.8].)

2. Un vaisseau spatial pulsant

Notre raisonnement se ramène à trois thèses :

1° La force d'attraction exercée sur un solide de dimensions finies diffère de la force exercée sur un point matériel de masse identique concentrée au centre de masse du solide.

2° En faisant varier les dimensions et la forme du solide, on peut faire varier l'intensité de la force d'attraction appliquée à ce solide.

3° Il est possible de choisir les variations de dimensions et de forme du solide de telle façon qu'à la longue les variations résultantes de la force d'attraction fassent dévier d'une façon sensible la trajectoire du solide de la trajectoire initiale.

La première assertion est évidente. La seconde découle de la première. La troisième sera démontrée dans le texte qui suit.

Dans le cas général, le mouvement d'un solide (différent d'un point matériel) dans un champ de forces newtoniennes ne se laisse pas définir sous une forme finie, à cause de l'interaction du mouvement du centre de masse du solide et du mouvement autour du centre de masse du solide. Or, on montre dans [9.3] qu'un solide symétrique peut se déplacer dans un champ de forces newtoniennes centrales de telle façon que l'axe de symétrie du solide reste normal au plan de son orbite. Une telle situation est représentée sur la figure 9.1 : la force exercée sur le corps devient alors centrale, se définit seulement par la distance r du centre de masse du corps au centre d'attraction et dérive de la fonction de forces $U(r)$. Le mouvement se produit suivant une orbite plane et se définit complètement par les intégrales des aires et de la demi-force vive :

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{9.2.1}$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{U(r)}{m} = h. \tag{9.2.2}$$

Introduisons le demi-paramètre focal osculateur $p(t)$ et l'excentricité osculatrice $e(t)$ de l'orbite. Le rayon vecteur r et la vitesse du corps V en orbite osculatrice s'écriront

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\nu}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{p}(1 + e^2 + 2e\cos\nu)}. \tag{9.2.3}$$

Ici ν est l'anomalie vraie en mouvement perturbé. Conformément à (9.2.1) on constate que le demi-paramètre focal p est constant : cette propriété des mouvements dans un champ de forces centrales quelconques est bien connue.

Calculons la quantité

$$\frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r} = \frac{\mu}{2p}(1 + e^2 + 2e\cos\nu) - \frac{\mu}{p}(1 + e\cos\nu) = \\ = \frac{\mu}{2p}(e^2 - 1). \tag{9.2.4}$$

En accord avec (9.2.4) et en vertu de la constance de p, les intégrales (9.2.1) et (9.2.2) s'écriront maintenant

$$p = p_0, \tag{9.2.5}$$

$$e^2 + \frac{2p}{\mu}\left[\frac{\mu}{r} - \frac{1}{m}U(r)\right] = \bar{h}, \tag{9.2.6}$$

où $\bar{h}$ est une nouvelle constante. Dans notre cas $U(r)$ se définit par (9.1.1); après transformations, l'intégrale (9.2.6) peut s'écrire ainsi:

$$e^2 + \frac{2p}{r}\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2+\sqrt{1+\alpha^2}} = \bar{h}, \quad \alpha = \frac{l}{r}. \tag{9.2.7}$$

On voit que e est fonction de r, autrement dit e est variable. Au cours du mouvement, l'excentricité osculatrice $e(t)$ et le rayon vecteur $r(t)$ varient de telle façon que la relation (9.2.7) reste vraie. On peut donc considérer le mouvement dans le plan e^2, r/p, en accord avec (9.2.7). Or, en réalité, le mouvement peut se produire non pas dans la totalité du plan e^2, $\bar{r}$ ($\bar{r} = r/p$) mais dans un domaine quelconque de ce plan. Il ressort en effet de la première égalité (9.2.3) que $e^2 \cos^2 \nu = (p/r - 1)^2$, d'où

$$e^2 \geqslant \left(\frac{p}{r} - 1\right)^2 \equiv e_*^2(\bar{r}). \tag{9.2.8}$$

Ainsi donc, le mouvement dans le plan e^2, $\bar{r}$ se situe toujours au-dessus de la courbe $e_*^2(\bar{r})$ définie par l'équation $e_*^2 = (p/r - 1)^2$. Il est évident que $e_*^2(\bar{r}) \to \infty$ pour $\bar{r} \to 0$, que $e_*^2 = 0$ pour $p/r = 1$ et que $e_*^2 \to 1$ pour $r \to \infty$. De plus $e_*^2 = 1$ quand $r/p = 1/2$ (fig. 9.2).

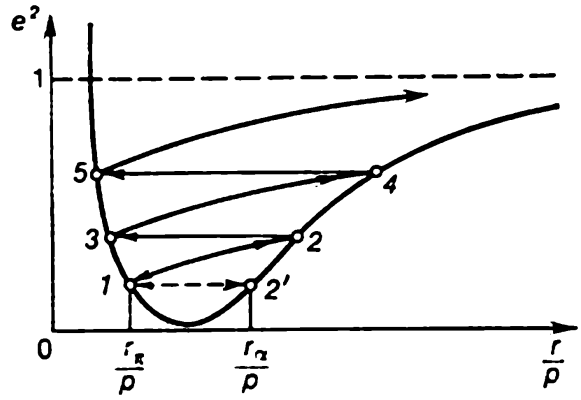


Fig. 9.2. Diagramme du mouvement d'un haltère pulsant

Construisons dans le domaine (9.2.8) du mouvement réel la courbe définie par (9.2.7) pour p, $\bar{h}$ fixées (fig. 9.2). Lorsque r croît de 0 à ∞, l'excentricité en tant que fonction formelle augmente de façon monotone de $e^2 = -\infty$ à $e^2 = \bar{h}$. Le mouvement réel est défini par l'arc de la courbe (9.2.7) intercepté par le domaine (9.2.8). L'intersection de la courbe (9.2.7) avec la courbe frontière $e_*^2 = e_*^2(\bar{r})$ définie par une relation consécutive à (9.2.8) donne les points extrêmes de la trajectoire: $\bar{r} = \bar{r}_{\min}$ (avec $e = e_{\min}$) et $\bar{r} = \bar{r}_{\max}$ (avec $e = e_{\max}$). Le mouvement du corps est périodique en e et en $\bar{r}$, si bien que, dans le plan e^2, $\bar{r}$, il a lieu par exemple suivant l'arc *1-2* (fig. 9.2) du point *1* ($e = e_{\min}$, $\bar{r} = \bar{r}_{\min}$) vers le point *2* ($e = e_{\max}$, $\bar{r} = \bar{r}_{\max}$), puis en sens inverse du point *2* vers le point *1*, et ainsi de suite. S'il y avait, au lieu du corps, un point matériel de même masse ($l = 0$), il auraitsuivi, en accord avec (9.2.7), une trajectoire képlérienne elliptique non perturbée $e = \text{Cte}$ (par exemple en parcourant dans le

sens direct et inverse la portion *2-3* de la courbe de la figure 9.2).

Ainsi donc, pendant le mouvement de l'haltère normal au plan de son orbite, on constate que l'excentricité oscille périodiquement entre ses valeurs minimale et maximale. Quand l'haltère est au point le plus rapproché de la Terre, l'excentricité est minimale ; au point de l'orbite le plus éloigné de la Terre l'excentricité est maximale. Ces oscillations de l'excentricité ne sont pas très prononcées, si bien, qu'en général, l'orbite de l'haltère ressemble à une ellipse képlérienne ; le satellite haltère se déplacera dans un voisinage borné de la Terre sans s'éloigner de ce domaine.

Si l'on pouvait faire changer notablement l'excentricité de l'orbite, on pourrait transformer l'orbite elliptique de départ ($e < 1$) en orbite hyperbolique ($e > 1$) par des variations successives de l'excentricité, et le satellite pourrait s'éloigner dans l'espace interplanétaire. Or, si le satellite est un point matériel, son orbite garde une excentricité inchangée ; même si le satellite a la forme d'un haltère, comme dans le cas que nous venons de considérer, l'excentricité de son orbite varie périodiquement et très faiblement. Il n'y a aucune variation systématique de l'excentricité. Tant que le satellite reste petit, on n'a apparemment aucun moyen de changer sensiblement l'excentricité.

Maintenant nous passons au point le plus important de notre raisonnement. Supposons que le satellite haltère soit doué de la faculté de *pulser*, c'est-à-dire de se contracter instantanément en un point et de se déployer instantanément sur toute sa longueur. D'ailleurs, les pulsations ne doivent pas forcément être instantanées ; cela permet tout bonnement de simplifier le raisonnement, bien qu'on puisse en principe envisager des variations lentes de la longueur de l'haltère.

Supposons donc que l'haltère ait commencé son mouvement au point le plus proche de la Terre et ait fait une demi-révolution jusqu'au point le plus éloigné de la Terre (le long de la portion *1-2* de la courbe de la figure 9.2) ; nous avons vu qu'en ce point l'excentricité atteint sa valeur maximale ($e = e^{(1)}_{max}$, $\bar{r} = \bar{r}^{(1)}_{max}$). Il s'y produit un repliement instantané de l'haltère dont la longueur « s'annule » (on entend par là que la longueur de l'haltère replié devient négligeable devant sa longueur déployée). A partir de ce moment le satellite se déplacera à la façon d'un point matériel, c'est-à-dire suivant un arc d'ellipse képlérienne (le long de la portion *1-2* de la courbe de la figure 9.2) en conservant inchangée la valeur maximale de l'excentricité $e = e^{(1)}_{max}$ qui a été atteinte à l'instant précédent.

Revenant au point le plus rapproché de la Terre (il sera bien sûr distinct du premier point « rapproché ») nous aurons conservé intacte l'excentricité atteinte. A cet instant, déployons entièrement l'haltère ! Grâce à sa longueur notable, l'excentricité de l'orbite de l'haltère recommencera à augmenter (le long de la portion *3-4* de la

courbe de la figure 9.2). Arrivant de nouveau au point le plus éloigné de la Terre, nous aurons une excentricité $e^{(2)}_{max}$ plus grande qu'au premier éloignement maximal ($e^{(2)}_{max} > e^{(1)}_{max}$). Replions l'haltère et conservons la nouvelle valeur de l'excentricité intacte jusqu'à l'instant où nous pourrons le déployer de nouveau, et ainsi de suite. Finalement, après de nombreuses pulsations de l'haltère, nous obtiendrons une variation notable de l'excentricité de l'orbite ; si nous arrivons à atteindre la valeur hyperbolique ($e > 1$) nous pourrons quitter le champ d'attraction de la Terre.

Il se produit ainsi un transfert de l'énergie dépensée pour faire « pulser » l'haltère en énergie du mouvement de l'engin sur son orbite, ce qui permet justement de mettre l'engin en vitesse et de s'arracher à l'attraction terrestre. L'orbite de l'engin représente une spirale déployée dont le nombre des spires est égal au nombre des pulsations de l'haltère. A l'engin spatial qu'on fait changer d'orbite en variant la force de gravité qui s'exerce sur lui, nous donnerons l'appellation de *gravidyne*.

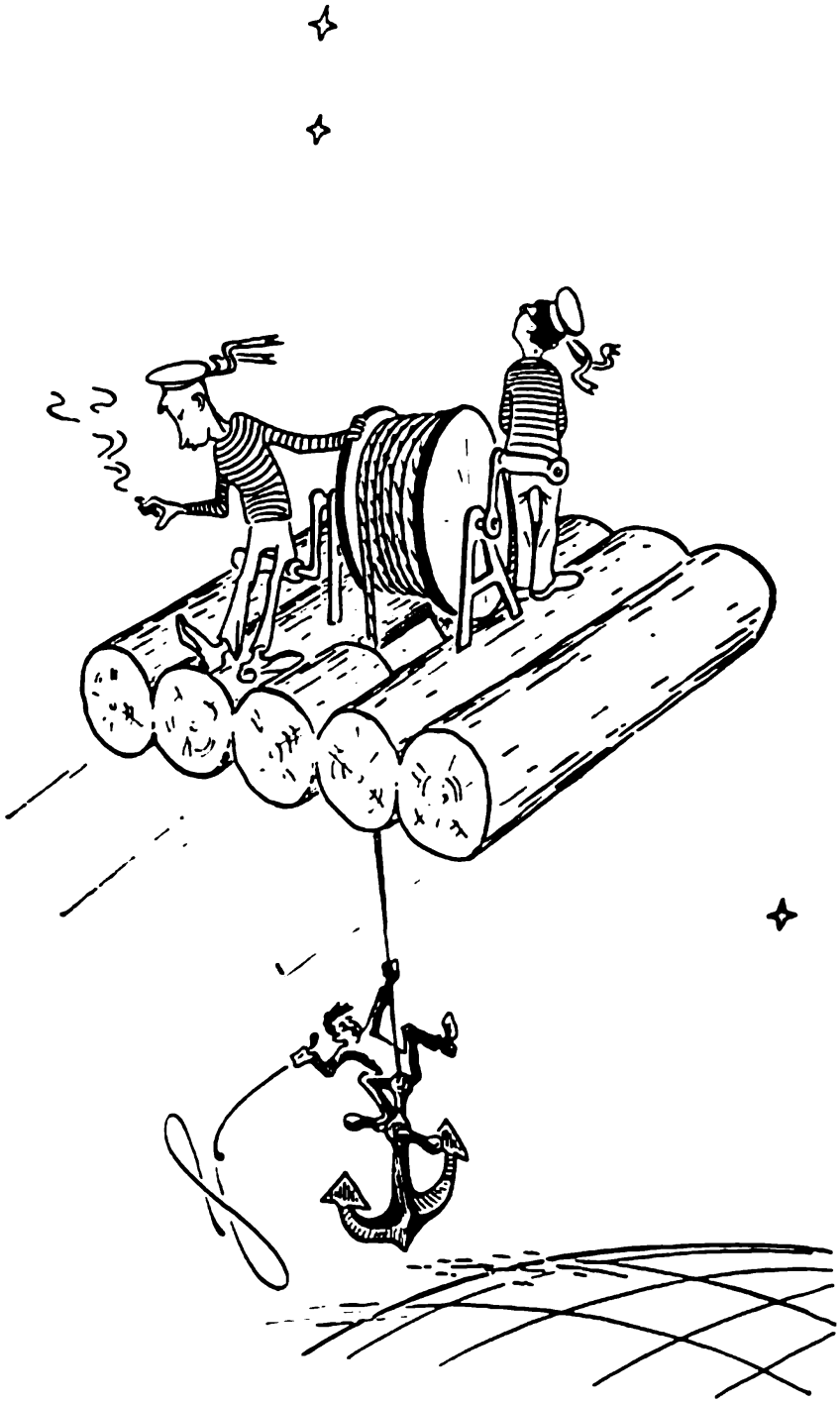
La condition nécessaire pour que les forces intérieures dépensées pour les « pulsations » de l'haltère puissent produire un effet extérieur notable est l'existence d'un champ de forces extérieur en interaction avec les forces intérieures. Il faut en outre que les forces intérieures et extérieures vérifient une certaine condition de résonance. La fameuse histoire du baron von Münchhausen se tirant lui-même du marécage par les cheveux n'y trouve-t-elle pas son explication ?

3. Rattrapez votre station à la nage

Ne serait-ce pas une solution miracle ? Au lieu du propulseur à réaction, vous montez un simple moteur électrique pour enrouler ou dérouler en temps utile le câble reliant les boules. Mieux, vous pouvez embaucher un homme de peine qui fera cette besogne pour vous...

Cependant un calcul approximatif nous rappelle à la dure réalité des faits. En n cycles (déploiements et repliements de l'haltère) l'excentricité aura atteint une valeur $e_n^2 \approx e_0^2 + n\,(l/p)^2\,(1 + e_0^2)$ (e_0 étant sa valeur initiale). Donc, pour atteindre un $e \sim 1$ il aura fallu $n \sim (p/l)^2$ cycles (révolutions). Si l'orbite de départ a $p = 10\,000$ km et si $l = 1$ km, on a $n \sim 10^8$ révolutions. Puisque même près de la surface de la Terre le satellite fait une révolution en une heure et demie et que la période de révolution est d'autant plus longue que l'on se trouve loin de la Terre, la durée du vol avec un tel nombre de révolutions sera $T > 1{,}5 \cdot 10^8$ h, soit à peu près 20 000 ans ! Notre bonhomme doit vraiment avoir une patience hors de commun...

Remarquons que le rapport de l'accélération perturbatrice à l'accélération principale de la pesanteur en orbite de départ est d'ordre



17-0262

$f \sim (l/p)^2$. Or, si nous mettons sur la même orbite un haltère de longueur $l = 10$ km ou $l = 100$ km, nous obtenons respectivement $f \sim 10^{-6}$ et $f \sim 10^{-4}$. Ces chiffres définissent le même ordre d'accélération que les moteurs ioniques et à plasma de faible poussée. Mais, avec ces paramètres, le vaisseau spatial devrait mesurer quelques dizaines, voire quelques centaines de kilomètres! Pour $l = 100$ km le nombre de révolutions nécessaire pour atteindre la vitesse parabolique diminue jusqu'à $n \sim 10^4$, et la limite inférieure de la durée de mise en vitesse jusqu'à deux ans, ce qui, du moins, n'est pas ridicule. On doit se rappeler, cependant, les centaines de kilomètres de câble à enrouler et à dérouler, avec tous les problèmes que cela pose. Donnons libre cours à l'imagination et figurons-nous un vaisseau spatial long de 1000 km (dans l'Espace, on n'est point à l'étroit...). Un tel vaisseau aurait atteint la vitesse parabolique après une centaine de révolutions, soit au bout d'une semaine !

Remarquons en outre qu'un vaisseau spatial est d'autant plus efficace que la masse de l'astre central est forte et que l'engin peut s'approcher du centre de cet astre. La masse du Soleil est grande, mais le Soleil lui-même est très grand ; on ne peut pas s'approcher trop près de son centre. Au contraire, on peut s'approcher du centre de la Terre, mais notre planète a une masse relativement faible. Il existe cependant dans l'Univers beaucoup d'étoiles parfaitement adaptées aux évolutions d'un gravidyne dans leurs environs. Ce sont les *naines blanches*: de taille comparable à celle d'une planète, une telle étoile a une masse comparable à celle du Soleil. Dans le

Tableau 9.1

Corps céleste	Distance initiale du vaisseau au centre du corps céleste, km	$f \sim (l/p)^2$	Nombres de révolutions de mise en vitesse	Durée de la mise en vitesse
Terre	$7 \cdot 10^3$	10^{-4}	10^4	deux ans au moins
Soleil	$7 \cdot 10^5$	10^{-8}	10^8	80 ans au moins
Naine blanche (Sirius B)	$2 \cdot 10^4$	10^{-5}	10^5	quelques heures (1,5 h au moins)

voisinage d'une naine blanche, le gravidyne peut atteindre la vitesse de libération quelques dizaines ou centaines de fois plus vite qu'au voisinage de la Terre.

Le tableau 9.1 donne les caractéristiques de la mise en vitesse d'un vaisseau spatial de 140 kilomètres de long, dans la banlieue de la Terre, du Soleil et d'une naine blanche. La demi-longueur du gravidyne est $l = 70$ km. Peut-être les habitants des planètes des

naines blanches se serviraient-ils de gravidynes pour voyager dans l'espace et non de fusées ?

Les pulsations n'impliquent pas forcément un changement de la forme du vaisseau. On pourrait peut-être atteindre le même but en faisant pulser une masse de fluide à l'intérieur du vaisseau de forme invariable [9.4].

On pourrait peut-être renoncer en général aux pulsations et faire pivoter convenablement le vaisseau à l'instant nécessaire par un moyen quelconque (par exemple à l'aide des volants d'inertie). En effet, la force d'attraction dépend aussi de l'orientation du vaisseau par rapport à la Terre. Dans ce cas l'énergie dépensée pour faire pivoter le gravidyne se transforme en énergie de la variation de l'orbite; le vaisseau lui-même ne change pas de forme, ce qui est certainement plus commode qu'un gravidyne pulsant. Quant au principe, il reste le même: on modifie l'orbite en faisant varier la force de gravité exercée sur l'engin.

Notre but n'est cependant pas de suggérer des solutions matérielles mais de démontrer la possibilité théorique de l'évolution de l'orbite d'un corps pulsant. Toujours théoriquement, un cosmonaute qui se retrouve dans l'espace hors de son vaisseau et dépourvu de son moteur individuel (une situation chère aux auteurs de science-fiction !) peut rattraper l'appareil en modifiant son orbite au moyen de pulsations adéquates. Il n'a qu'à nager à la brasse pour sauver sa vie. Seulement, ne me demandez pas combien il y mettra de temps.

4. Le gravidyne et les lecteurs

La publication des articles [9.1, 9.2] sur le gravidyne a suscité un vif intérêt chez le lecteur. L'ingénieur I. Troïtski, de la ville de Toula, fait part de ses impressions sur l'article de V. Béletski et M. Guiverts, publié par la revue *Kosmitcheskie issledovania*, au magazine des jeunes *Tekhnika — molodioji*: « J'étais ahuri. Dès l'école, on nous apprend que le changement de la distribution des masses dans un « système fermé » (un satellite) n'a aucune influence sur la trajectoire de son mouvement. Et voilà que maintenant on nous apprend le contraire... Il existe une possibilité tout à fait réaliste, en variant la forme du vaisseau, en pompant du liquide d'une partie du vaisseau à une autre, en faisant des manœuvres précises, de modifier la direction du vol et de partir à la conquête de l'Espace. *Kosmitcheskie issledovania* est une revue scientifique spécialisée à tirage réduit... J'aimerais que votre magazine demande aux auteurs d'écrire un article de vulgarisation, plus accessible au public.»

Faisant écho à cet appel, *Tekhnika — molodioji* publie bientôt l'article [9.2]. Aussitôt un ingénieur moscovite se met dans tous ses états et adresse au magazine le message suivant:

« Chers camarades ! Dans le n° 3 de l'année courante vous avez publié l'article *Gravidyne* signé du professeur V. Béletski [...]. Les raisonnements développés dans l'article relèvent de l'ignorance la plus crasse et confirment que des grades universitaires sont quelquefois décernés — et c'est à pleurer de honte — à des individus qui ignorent les choses les plus élémentaires. [...] Il est grand temps de démasquer certains docteurs ès sciences qui s'obstinent à mépriser des faits évidents et confirmés par les observations; l'auteur de l'article *Gravidyne* est certainement du nombre.»

Vous parlez d'une lettre!

Les « interprétations foncièrement erronées de V. Béletski » ont exaspéré un autre lecteur, de la ville de Djezkazgan: « Les forces intérieures de l'engin spatial ne peuvent aucunement influencer l'intensité de l'attraction newtonienne exercée par l'Astre Céleste sur cet engin. Le fameux « haltère » du professeur Béletski, qu'il soit replié ou déployé, gardera donc par rapport à l'Astre Céleste une position telle que son centre de masse soit à une distance inchangée du centre de l'Astre Céleste. Les élucubrations pseudo-savantes de V. Béletski, tout professeur et docteur ès sciences qu'il soit, résultent de l'incompréhension la plus totale des lois physiques de la mécanique céleste; la brasse paraît être son style préféré non seulement dans la nage mais aussi dans la science.»

L'auteur a beaucoup de respect pour l'opinion des lecteurs et comprend parfaitement que « la nature n'a que faire de nos grades: tout nu on est devant la nature»*). Je voudrais remarquer seulement que les lecteurs, tant enthousiasmés qu'indignés, ont été victimes de deux malentendus.

Le premier malentendu concerne la thèse: « Les forces intérieures sont incapables de changer le mouvement du centre de masse du système ». Cela est certainement vrai, mais à condition qu'il n'existe aucune force *extérieure*. Or, en réalité, il y a toujours des forces extérieures au système en question. Dans bien des cas, c'est justement le jeu des forces intérieures et extérieures qui définit le mouvement. Un exemple: la locomotive (frottement des roues sur les rails!). Un autre exemple: le gravidyne.

Le second malentendu tient au fait que l'on ne se rend pas assez compte de la nature non ponctuelle des corps: sollicités par la gravitation newtonienne, les solides allongés suivent généralement des trajectoires qui ne sont pas rigoureusement képlériennes.

Citons un exemple persuasif de « l'effet gravidyne » [9.3].

Les équations du mouvement d'un haltère dans un champ de forces newtoniennes centrales admettent une solution particulière rigoureuse: le centre de masse de l'haltère décrit une orbite circulaire plane de rayon constant quelconque R_0, le centre d'attraction se confond avec le centre de l'orbite, et l'haltère lui-même est orienté en permanence parallèlement au rayon vecteur du point courant de l'orbite. La vitesse V du centre de masse de l'haltère est définie par la formule

$$V^2 = \frac{1+\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}\frac{\mu}{R_0},$$

où $\alpha = l/R_0$ et l est la demi-longueur de l'haltère. Cette orbite circulaire est non képlérienne: pour une orbite képlérienne, la vitesse circulaire aurait pour expression $V^2 = \mu/R_0$. Pour $\alpha \geqslant 0{,}47$ on a $V^2 \geqslant 2\frac{\mu}{R_0}$, c'est-à-dire que V devient plus grande que la vitesse parabolique. Si donc l'haltère présente une telle valeur de α, il suffit de le contracter instantanément en un point pour qu'il quitte son orbite circulaire et s'envole dans l'infini. Seulement, pour que cela devienne possible, l'haltère doit être à peu près aussi grand que son orbite! Pour un engin de dimensions plus modestes, comme nous l'avons déjà vu, la contraction instantanée peut être remplacée par des déploiements et des repliements répétés dans un ordre précis.

Je tiens à souligner que la possibilité d'effectuer des manœuvres à bord d'un gravidyne n'a pas été démontrée verbalement mais par la résolution exacte des équations du mouvement rigoureuses.

---

*) Cet aphorisme appartient à V. Solonenko, éminent géologue sibérien, membre correspondant de l'Académie des sciences de l'U.R.S.S. (voir le journal *Vostotchno-Sibirskaïa pravda*, 18.XII.1966).

5. Le gravidyne et les résonances

Le gravidyne est un exemple frappant de l'action des résonances. Le pilotage du gravidyne est basé sur l'utilisation judicieuse des résonances. En effet, le cycle de pulsation du gravidyne coïncide exactement avec une révolution en orbite. Autrement dit, les deux fréquences caractéristiques du système sont en résonance 1/1. Avec d'autres rapports de résonance l'évolution de l'orbite serait peut-être moins rapide. S'il n'y avait aucune résonance, on n'aurait probablement jamais réussi à faire évoluer l'orbite d'une façon notable, un peu comme on n'arrive jamais à faire mouvoir une balançoire en faisant des mouvements désordonnés avec les jambes.

L'importance des résonances dans le vol à bord d'un gravidyne a été clairement démontrée par A. Mitnitski dont nous exposons les résultats dans ce n° *).

Bornons-nous à considérer le mouvement plan d'un gravidyne plan et dynamiquement symétrique par rapport à l'axe normal au plan de l'orbite. On a alors dans la fonction de forces (6.1.6), qui définit d'une façon assez précise l'action d'un champ newtonien sur le gravidyne, $C = A + B = J$ et $\gamma'' = 1$. Il vient

$$U = \frac{\mu m}{r} - \frac{1}{2}\frac{\mu}{r^3} J. \tag{9.5.1}$$

Les équations du mouvement s'écriront en coordonnées polaires r, φ comme suit:

$$\ddot{r} = -\frac{\mu}{r^2} + \frac{c^2}{r^3} - \frac{3\mu J}{2mr^4}, \tag{9.5.2}$$

$$r^2\dot{\varphi} = c. \tag{9.5.3}$$

En outre, l'angle ψ des directions fixées dans l'espace et dans le gravidyne aura pour équation

$$\dot{\psi} = \frac{c_1}{2J} - \frac{c}{r^2}. \tag{9.5.4}$$

Les quantités c_1 et c intervenant dans les formules (9.5.2) à (9.5.4) sont des constantes.

Le moment d'inertie J est la commande. Elle est variable, à cause des pulsations de l'engin. Supposons qu'il y ait $0 < J_{\min} \leqslant J \leqslant J_{\max}$ et que $J = J(\varphi) = J_0 f(\varphi)$ soit une fonction explicite de l'angle polaire φ.

Faisons une transformation appelée *transformation de Binet*: introduisons une nouvelle variable dépendante $u = p/r$, où $p = c^2/\mu$, et transformons l'équation (9.5.2) pour la nouvelle variable indépendante φ compte tenu de (9.5.3). Nous obtenons alors au lieu

*) L'auteur remercie A. Mitnitski d'avoir mis ses calculs à notre disposition.

de (9.5.2)

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2}+u=1+\varepsilon f(\varphi)\,u^2, \quad \varepsilon=\frac{3J_0}{2mp^2}. \tag{9.5.5}$$

Donnons-nous maintenant une fonction concrète $f(\varphi)$. Par définition $f(\varphi) > 0$. Pour tenir compte des « pulsations » du gravidyne il faut que $f(\varphi)$ soit une fonction périodique de l'argument. Adoptons une fonction élémentaire qui satisfasse aux conditions énoncées :

$$f(\varphi) = 1 + \delta \sin(\alpha\varphi - \beta). \tag{9.5.6}$$

La constante δ vérifie la condition $0 < \delta < 1$; quant à la constante α, on lui donne en attendant une valeur arbitraire, de même qu'à la constante β.

Revenons à l'équation (9.5.5). Si $\varepsilon = 0$ ($J_0 = 0$), on a le cas de mouvement d'un point matériel dans un champ de forces newtoniennes : il est clair que la solution de (9.5.5) correspond à des orbites képlériennes. Cette solution s'écrit

$$u = 1 + e\cos(\varphi - \omega), \tag{9.5.7}$$

où e est l'excentricité de l'orbite et ω la longitude du périgée. Puisque $r = p/u$, on comprend que p est le demi-paramètre focal de l'orbite. Le paramètre ε est très petit. Pour $\varepsilon \neq 0$ il est logique de chercher la solution de (9.5.5) sous la même forme (9.5.7), en supposant que e et ω soient maintenant variables. Il ne reste alors qu'à définir les fonctions $e(\varphi)$ et $\omega(\varphi)$. On peut dire que (9.5.7.) est la « solution génératrice » de la solution cherchée.

Nous pouvons cependant améliorer quelque peu la solution génératrice. En effet, le mouvement en question est équivalent à celui d'un point matériel dans un champ de forces centrales mais non newtoniennes (9.5.1). Or, le fait que le champ ne soit pas newtonien compromet la fermeture de l'orbite : on entend par là que le périgée de l'orbite présentera une « dérive » systématique. Il serait bon d'en tenir compte, ne soit-ce que partiellement, déjà dans la solution génératrice. Posons donc $u = 1 + q$ et portons cette valeur dans (9.5.5) compte tenu de (9.5.6). Nous obtiendrons alors pour q l'équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2q}{d\varphi^2}+\lambda^2 q=\varepsilon F(q,\varphi), \quad \lambda^2=1-2\varepsilon,\\ &F(q,\varphi)=1+q^2+\delta\sin(\alpha\varphi-\beta)\cdot[1+2q+q^2]. \end{aligned}\right\} \tag{9.5.8}$$

Comme solution génératrice de (9.5.8), on peut prendre maintenant la solution de cette même équation pour $F = 0$:

$$q = e\cos(\lambda\varphi - \omega), \quad q' = -e\lambda\sin(\lambda\varphi - \omega). \tag{9.5.9}$$

Avec les variables initiales, on a la trajectoire

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\lambda\varphi-\omega)}.$$

Puisque $\lambda \neq 1$, cette trajectoire représente évidemment une rosace non fermée, du même type que sur la figure 1.12, *a*. Cherchons à présent la solution de (9.5.8) sous la forme (9.5.9) en supposant que e et ω soient maintenant variables. Nous retrouvons alors une situation déja connue qui conduit à des équations analogues à (1.6.4)

$$\left.\begin{aligned} \frac{de}{d\varphi} &= -\frac{\varepsilon}{\lambda} F\left(e\cos(\lambda\varphi-\omega),\ \varphi\right)\sin(\lambda\varphi-\omega), \\ \frac{d\omega}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon}{\lambda e} F\left(e\cos(\lambda\varphi-\omega),\ \varphi\right)\cos(\lambda\varphi-\omega). \end{aligned}\right\} \quad (9.5.10)$$

En vertu de la construction (9.5.8) de la fonction $F(q, \varphi)$, le système n'admet que les résonances suivantes entre la fréquence α des pulsations du gravidyne et la fréquence λ de son mouvement orbital:

$$\alpha = k\lambda, \quad k = 1,\ 2,\ 3. \quad (9.5.11)$$

Traitant les équations (9.5.10) par le procédé standard de la mise en moyenne, nous obtenons immédiatement le résultat suivant: à moins que α soit proche de λ, de 2λ ou de 3λ, l'orbite ne subit aucune évolution (les seconds membres des équations (9.5.10) s'annulent en moyenne et $e \approx e_0$, $\omega \approx \omega_0$). Au contraire, si une des conditions (9.5.11) est vérifiée, l'orbite suit une évolution profonde, décrite en première approximation (au sens de la méthode de la moyenne) par les équations

$$\left.\begin{aligned} \frac{de}{d\varphi} &= -\frac{\varepsilon\delta}{2\lambda} J_e^k(e)\cos(\omega-\beta), \\ \frac{d\omega}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon\delta}{2\lambda} J_\omega^k(e)\sin(\omega-\beta), \end{aligned}\right\} \quad (9.5.12)$$

où les expressions de $J_e^k(e)$, $J_\omega^k(e)$ s'écrivent respectivement pour les résonances $k = 1, 2, 3$ comme suit:

$$\left.\begin{aligned} J_e^1 &= \left(1+\frac{e^2}{4}\right), & J_\omega^1 &= \frac{1}{e}\left(1+\frac{3}{4}e^2\right), \\ J_e^2 &= e, & J_\omega^2 &= 1, \\ J_e^3 &= \frac{1}{4}e^2, & J_\omega^3 &= \frac{1}{4}e. \end{aligned}\right\} \quad (9.5.13)$$

On voit de (9.5.13) et de (9.5.12) que la plus grande vitesse de l'évolution de l'orbite en excentricité répond à la résonance 1/1. On a dans ce cas $de/d\varphi \sim \varepsilon$, tandis qu'avec les résonances 1/2 et 1/3 on a respectivement $de/d\varphi \sim \varepsilon e$ et $de/d\varphi \sim \varepsilon e^2$.

Le système (9.5.12) est intégrable par quadratures. Mais, cela nous intéresse déjà moins: notre but était de montrer que « l'effet gravidyne » est fondé sur les résonances, et nous l'avons fait.

6. Le gravidyne et la science-fiction

L'idée du gravidyne a enthousiasmé non seulement les scientifiques (voir [9.5-9.8]) mais aussi les auteurs d'ouvrages de vulgarisation scientifique et même les auteurs de science-fiction. En 1974, la revue *Kvant* publiait dans son n° 2 un article de I. Vorobiov *Un voyage insolite*. L'auteur a su poser le problème d'une nouvelle façon, après quoi le vol du gravidyne a pu être décrit par les moyens des mathématiques élémentaires: dans la version de I. Vorobiov la trajectoire du vol du gravidyne est une succession de portions d'orbites purement képlériennes. (Je tiens à corriger en passant une erreur insignifiante dans le texte de l'article : on doit lire $\cos^3 \frac{\alpha}{2}$ au lieu de $\cos \frac{\alpha}{2}$). Dans son livre de vulgarisation *La nouvelle astronomie récréative* (« Naouka », M., 1972), V. Komarov réservera un chapitre à la description de l'idée du gravidyne. Je crois cependant que l'écho le plus inattendu à nos premières publications fut *La solution de désespoir* de V. Komarov, une œuvre de science-fiction publiée dans le n° 2, 1972, de la revue *Zemlia i Vselennaïa*, dont nous citons quelques extraits:

« L'astronef *Omicron* faisait un voyage de routine à destination de Mégos, ayant à son bord douze personnes d'équipage et quelques 360 passagers. Le capitaine Meng et le navigateur Gascondi contemplaient en silence le tableau de bord, comprenant parfaitement que leur situation était sans issue.... L'erreur s'était produite au moment où le vaisseau spatial sortait de l'hyperespace. Quelque chose s'était détraqué dans l'enchevêtrement diabolique des commandes de l'appareil. Un écart insignifiant du programme, une fluctuation accidentelle... Il n'en fallut pas plus à l'astronef pour « refaire surface » à cinq parsecs du point d'arrivée prévu... Et le pire, c'est que ce fut au voisinage d'une naine blanche, une étoile grosse comme un poing mais extrêmement dense et nantie d'un pouvoir d'attraction effrayant.

Tous les propulseurs du vaisseau fonctionnaient à fond. Cela pouvait tout juste sauver *Omicron* de la chute instantanée et mortelle sur l'astre mais ce n'était pas suffisant pour briser les chaînes de la gravitation. A présent l'engin spatial tournoyait en orbite fermée autour de la naine blanche, à quelques 20 000 kilomètres de son centre, sans pouvoir se débarrasser des bras invisibles qui l'attiraient à l'étoile. Cependant la durée de vol prévue touchait à sa fin: les réserves d'énergie seraient bientôt épuisées.

[...] La naine était trop proche. Même à travers le champ protecteur, Meng croyait sentir sur sa peau l'haleine brûlante de l'étoile. Le champ tenait bon, mais dans six heures et demie, quand les batteries seraient à plat...

[...] Au cours de sa longue carrière spatiale, le capitaine Meng s'était maintes fois trouvé dans des situations critiques. Aucune n'était cependant désespérée: l'expérience et l'esprit inventif aidant, le capitaine avait toujours fini par trouver la solution optimale en quelques secondes.

Cette fois-ci, la situation était vraiment sans issue. Un calcul tout à fait élémentaire, à la portée de n'importe quel élève navigateur, en témoignait d'une façon implacable.

[...] Mais non, il faut lutter, malgré les circonstances. Ne jamais se rendre. Même s'il n'y a aucun espoir... [...]

— Il faut revoir encore toutes les possibilités.

— Mais puisque c'est un cas élémentaire ! s'emporta Gascondi. De quelles possibilités parlez-vous ?

Le capitaine Meng le savait peut-être mieux que son navigateur. Une situation classique en somme, étudiée en long et en travers dès les premiers voyages dans l'Espace, et oubliée depuis ! Les instruments de navigation perfectionnés mettaient désormais les équipages à l'abri de pareils incidents. Depuis une cinquantaine d'années pour le moins, aucun vaisseau ne s'était laissé tomber dans le piège gravitationnel. Il a fallu que ce soit *Omicron*...

Mais si c'était justement leur chance ? Un problème théorique poussiéreux... On fait quand même de nouvelles découvertes tous les jours ! Cela valait peut-être la peine de revoir la situation à la lumière des connaissances nouvelles : on finirait peut-être bien par tomber sur une solution qui aura échappé aux auteurs des traités classiques de navigation...

Quoi qu'il en soit, il faut chercher. Mais comment faire changer d'avis à Gascondi ? [...] Meng se leva et alla vers le siège du navigateur :

— Réfléchissons ensemble. Voilà ce que...

Ils ne virent pas entrer Vel. Quand ils se rendirent compte de sa présence, il se tenait déjà devant le grand tableau et, en plissant ses yeux de myope, scrutait les cadrans.

En général, la consigne interdisait formellement aux passagers l'accès de la salle de commande. Vel cependant n'était pas un passager comme les autres. C'etait lui l'auteur de l'idée physique mise à la base du projet *Omicron*. Une multitude d'autres idées originales émises par Vel avaient exercé une influence notable sur le développement de la physique et de l'astrophysique. Il se rendait actuellement à l'université de Mégos pour y faire un cours sur la théorie de l'hyperespace.

Et pourtant, c'est à titre de passager que Vel se trouvait à bord d'*Omicron*, et Meng pensa avec angoisse que leur situation critique cessait d'être un secret.

— Drôle de situation, n'est-ce pas ?

Ces paroles sonnèrent d'une façon étrange en l'occurrence, d'autant plus qu'elles étaient prononcées sur un ton insaisissable, peut-être avec un léger sarcasme ou même avec une certaine satisfaction qu'on n'arrivait pas à comprendre.

Gascondi se contenta de hausser les épaules.

— Manque de puissance, eh ? demanda Vel dont le regard se détacha enfin du tableau de bord.

— C'est pas évident ? aboya Gascondi.

— Et le bouclier thermique sera foutu dans quelques heures ?

— Dans six heures et demie, précisa machinalement Meng.

— Ouais, fit le théoricien, songeur. Hum. Voyons...

Ses yeux profondément enfoncés pétillèrent d'excitation. Meng pensa que Vel avait l'air d'un chasseur tombé sur un gibier rare. Le fait qu'il était lui-même le gibier en question ne semblait pas le tracasser outre mesure...

[...] Concentrant sa volonté par un effort habituel, Vel balaya de son cerveau tout ce qui n'avait pas de rapport aux conditions du problème devant lequel le hasard stupide l'avait placé. Théoriquement, le problème était sans issue. Or, de toute sa vie Vel n'a fait autre chose que de résoudre des problèmes sans solution...

— Puis-je me servir de votre calculateur ? demanda-t-il émergeant un instant de ses réflexions.

[...] Meng et Gascondi patientaient en silence. Enfin Vel se détacha du clavier et poussa un soupir, qui pouvait être de soulagement mais aussi de découragement. Une lueur d'insouciance passa de nouveau dans ses yeux gris étroits.

— Savez-vous jouer aux échecs ? s'enquit-il froidement.

— Oui, fit Meng.

— Vous devez donc connaître ce genre de positions qui semblent perdues ? On le croit d'abord, mais à l'instant suivant on fait un coup bizarre qui ne sert

à rien sinon qu'à finir la partie en quelques minutes. Et c'est pourtant cette solution de désespoir qui vous conduit à la victoire!

Maintenant Meng avait la certitude que Vel avait entrevu une sortie du tunnel.

— Et bien? fit-il, incapable de maîtriser son impatience.

— [...] Il faut mettre la poussée maximale, expliqua Vel. Il griffona d'une main rapide quelques chiffres sur un bout de papier qu'il tendit à Meng.

— Mais, balbutia Gascondi, désemparé, cela ne donnera rien. Sauf que notre orbite deviendra un peu plus allongée.

— Justement, dit Vel.

[...] Dans son for intérieur, le capitaine avait pleine confiance en Vel. Sans hésiter il tendit sa main vers le grand pupitre et poussa de quelques crans les quatre leviers rouges, l'un après l'autre.

Gascondi blêmit. Le bourdonnement caractéristique des propulseurs se fit entendre, les relais de protection anti-accélération claquèrent.

— Si vous nous expliquez maintenant? ... dit Meng.

— Si je ne me trompe, commença lentement Vel, *Omicron* se compose de deux modules autonomes?

— Oui, acquiesça Meng. Les salles de commande et les propulseurs sont dans un module et les chambres et les locaux annexes dans l'autre.

— On peut donc diviser le vaisseau en deux moitiés et les écarter?

— Oui, cette possibilité a été prévue en cas d'incident et pour réparer les installations de force. Il y a un pulsateur spécial qui écarte et rapproche les modules.

— A quelle distance maximale?

— A cent cinquante kilomètres.

— Cent quarante suffisent amplement, marmonna Vel.

— Vous voulez larguer le compartiment passagers? s'agita Gascondi. Même après ça, la poussée ne sera pas assez forte.

— Ce serait trop facile, riposta énergiquement Vel. La naine ne nous laissera pas partir en paix. Il s'agit de tout autre chose...

— Nous perdons notre temps, interrompit Meng. Peut-être que nous...

— Oh! ce n'est pas le temps qui nous manque, objecta Vel, imperturbable. Rien ne presse. Vous savez, n'est-ce pas, ce qu'est un astronef pulsant?

Gascondi et Meng se regardèrent sans comprendre.

— Oui, dit Vel. C'est une idée très ancienne et tout à fait oubliée...

— Je me souviens vaguement de quelque chose, dit lentement Meng. Dans un vieux traité *)... Si je ne me trompe pas, l'idée essentielle est que le vaisseau spatial n'est pas un objet ponctuel et que par conséquent sa masse est distribuée dans un volume.

— Voilà, s'agita Vel, dès que vous avez divisé votre engin en deux, la force résultante de l'attraction qui s'exerce sur ces deux parties devient plus petite que la force qui agit en ce moment sur le vaisseau.

Son articulation était claire et nette, comme s'il faisait un cours à des étudiants.

— Ce qui veut dire, enchaîna Meng, que l'appareil divisé en deux commence à éprouver une force de répulsion?

— Et si l'on s'arrange pour rapprocher les moitiés à l'apocentre et les écarter au péricentre, votre appareil va dévier de l'orbite képlérienne et prendra une trajectoire en forme de spirale qui se déploie.

— Ouais... fit Meng, songeur.

---

*) Par hasard, la revue *Zemlia i Vselennaïa* a publié dans le même numéro, juste après le récit dont nous citons les extraits, le compte rendu critique d'un « vieux traité » de ce type: c'etait la première édition de nos *Essais*... (*Note de l'auteur*).

— Ça y est. Ça me revient, interrompit brusquement Gascondi, fou de joie. Merveilleux, fantastique, génial!

Il eut un petit rire nerveux:

— Mais, si je comprends bien, même pour vaincre l'attraction terrestre par ce moyen, il faut plusieurs années! Tandis que l'attraction de la naine blanche...

— Mais justement, fit Vel sans s'émouvoir. L'attraction est pour nous un facteur favorable. Plus l'astre est massif, plus vite on atteint la vitesse de libération. C'est paradoxal mais c'est comme ça!

— Combien d'heures devrons-nous attendre? s'enquit Meng.

— Eh bien... une heure et demie tout au plus, je crois *).

— Vous êtes un génie, sourit le capitaine et il reprit son poste devant le pupitre.

— Il faut seulement choisir les bons moments pour la séparation et le rapprochement, prévint Vel.

— Mais oui, je sais, répondit Meng en jouant sur les touches du calculateur.

— Je commence la manœuvre dans six minutes...

Le spectacle frappait l'imagination. L'astronef gigantesque se brisa en deux. Ses moitiés tantôt s'éloignaient, tantôt se rapprochaient de nouveau. Et, au rythme de cette « danse spatiale » inoubliable, l'orbite mortelle d'*Omicron* commença à se dérouler peu à peu.

La puissante force d'attraction, docile aux ordres de l'esprit humain, éloignait inexorablement l'astronef de l'étoile redoutable.»

---

*) Hélas, une heure et demie *au moins*. C'est la limite *inférieure*: la durée réelle de la mise en vitesse peut s'avérer *très* supérieure (*Note de l'auteur*).

DIXIÈME ESSAI

LE VOL INTERPLANÉTAIRE : PETITE POUSSÉE, GRANDS OBJECTIFS

Nous étions prisonniers sur notre globe terrestre,
Et que de fois, dans la théorie infinie des années,
Le regard tenace du Terrien n'a-t-il suivi
Dans les ténèbres sans bord le mouvement des planètes!

V. Brioussov
Le Fils de la Terre

Nous devons porter aux autres planètes
Le message de salut de la petite Terre!

V. Brioussov
Les espérances enfantines

1. Introduction

L'homme a fait de grands progrès dans l'exploration de l'espace. En douze ans, de 1957 à 1969, nous avons parcouru un très long chemin, du lancement du premier satellite jusqu'au débarquement sur la Lune. Toutefois l'objectif le plus convoité, le voyage vers des planètes lointaines, reste un rêve... Pareil voyage pose un problème pas facile. Plusieurs solutions peuvent être envisagées. Peut-être le vaisseau spatial sera-t-il assemblé en orbite circumterrestre et, après avoir fait le plein de propergol, démarrera-t-il en utilisant ses propulseurs. Il est également possible qu'au lieu des moteurs à propergols, le vaisseau utilise un moteur à faible poussée, par exemple un moteur ionique ou un moteur à plasma dont nous avons parlé dans le septième essai et qui sont aujourd'hui au stade de développement. Il ne saura communiquer à l'engin spatial qu'une très faible accélération, quelques mm/s^2 à peine. Elle suffira cependant, appliquée d'une façon constante pendant toute la durée du voyage (plusieurs mois !), à pouvoir faire des manœuvres compliquées dans l'espace. On s'imagine facilement un vaisseau parcourant une orbite en spirale qui se déroule autour de la Terre, atteignant la vitesse parabolique et partant en direction de Mars. Une fois dans les parages de Mars, les moteurs à faible poussée freineront graduellement le vaisseau jusqu'à la vitesse parabolique (relativement à Mars), puis le vaisseau se mettra en orbite finale autour de Mars en suivant une trajectoire d'approche en spirale et séjournera sur cette orbite pendant que le « module martien », son équipage à bord, touchera le sol, puis regagnera le vaisseau.

Dans un essai précédent nous avons déjà étudié des trajectoires spirales du vol à faible poussée au voisinage des planètes. Maintenant nous analyserons les trajectoires du vol à faible poussée *entre* les planètes. La phase de vol interplanétaire commence après que le vaisseau a atteint la vitesse parabolique par rapport à la planète de départ et prend fin lorsqu'il a atteint la vitesse parabolique par rapport à la planète d'arrivée. L'attraction des planètes est donc absolument négligeable en cette phase.

Le mouvement de l'engin est déterminé par l'attraction du Soleil et la poussée procurée par les propulseurs à réaction. Telle est la position du problème. Dans le texte qui suit, nous reprenons dans leurs grandes lignes les travaux [10.1-10.3] de l'auteur et de ses collègues V. Goloubkov, V. Egorov, V. Erchov. Pour plus de détails sur la dynamique du vol à faible poussée, le lecteur consultera avec profit la monographie [10.4] de G. Grodzovski, Iou. Ivanov et V. Tokarev.

2. Plus de charge utile, moins de combustible

Telle est la condition habituelle imposée à un vol spatial, de même qu'à un vol ordinaire et d'une façon générale à n'importe quel voyage. Autrement dit, on doit conduire le vol de façon à mener à bien l'entreprise au prix d'une dépense minimale de masse. Conduire le vol consiste à chercher une loi optimale de variation de l'accélération de poussée dans le temps f (t). Par définition de la force de réaction,

$$f = -\frac{V_r}{m}\frac{dm}{dt}, \tag{10.2.1}$$

où V_r est la vitesse d'éjection relative (par rapport à l'appareil) des produits de combustion (vitesse des particules dans la veine gazeuse), m (t) la masse variable du vaisseau, dm/dt débit-masse par seconde. Pour une large classe de fusées (par exemple à propergols), on peut poser V_r = Cte ; il ressort alors de (10.2.1) que

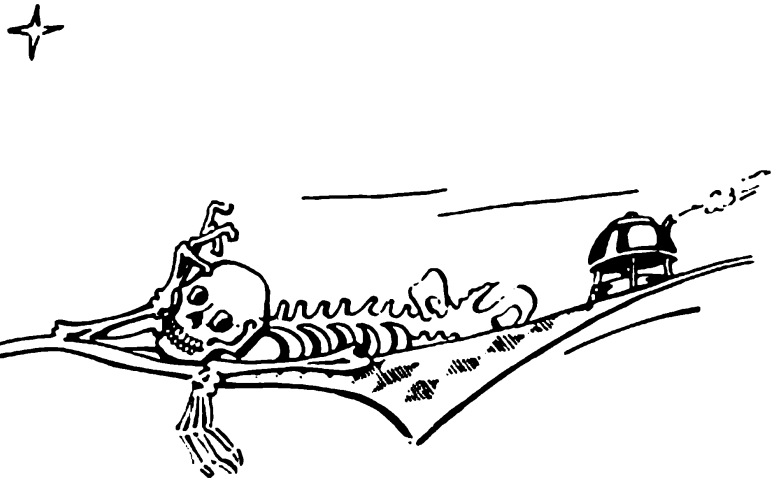
$$\frac{m_f}{m_0} = e^{-\frac{1}{V_r}\int_0^T f\,dt}, \tag{10.2.2}$$

où T est la durée de vol. Le rapport de la masse finale m_f (charge utile) à la masse initiale (m_0) est d'autant plus élevé que l'intégrale

$$S = \int_0^T f\,dt \tag{10.2.3}$$

est plus petite.

Il y a intérêt à choisir la loi de commande f (t) de façon à minimiser (10.2.3).



Or, pour de nombreux moteurs à faible poussée la valeur de V_r n'est pas constante. Par contre, la puissance N de la veine l'est (il s'agit de la partie de la puissance de l'installation propulsive de bord qui passe en énergie cinétique de la veine gazeuse). Par définition

$$N = -\frac{dm}{dt}\frac{V_r^2}{2}. \tag{10.2.4}$$

Il découle alors de (10.2.4) et (10.2.1) que

$$-\frac{1}{m^2}\frac{dm}{dt} = -\frac{f^2}{2N},$$

d'où

$$\frac{m_f}{m_0} = \frac{1}{1+\frac{m_0}{2N}\int\limits_0^T f^2\,dt}. \tag{10.2.5}$$

Le rapport des masses est d'autant plus élevé que la valeur prise par l'intégrale

$$I = \int\limits_0^T f^2\,dt \tag{10.2.6}$$

est plus petite. On doit donc, pendant le vol à faible poussée, faire varier l'accélération de poussée $\mathbf{f}(t)$ de façon à minimiser la valeur de l'intégrale I (10.2.6).

Les problèmes de cette nature sont appelés *problèmes de la commande optimale.*

Dans cet essai nous parlerons surtout des vols optimaux où l'on cherche à minimiser la fonctionnelle I (10.2.6). A la fin de l'essai, nous considérerons cependant un problème important de minimisation de la fonctionnelle S (10.2.3).

3. Principe du maximum de Pontriaguine

Dans le cas qui nous préoccupe, le problème de la commande optimale peut être posé comme suit. Soient les équations du mouvement sous forme vectorielle

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{10.3.1}$$

où $\mathbf{x}$ est un vecteur de composantes $x_1, x_2, \ldots x_n$; $\mathbf{f}$, un vecteur de composantes $f_1, \ldots, f_n$; $\mathbf{u}$, un vecteur de composantes $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Le vecteur $\mathbf{u}$ est le vecteur commande ; à chaque instant les commandes $u_1, \ldots, u_r$ prennent leurs valeurs dans un ensemble fermé U, si bien que $\mathbf{u} \in U$.

En pratique, les commandes se voient toujours imposer des restrictions: la poussée reste inférieure à une certaine valeur limite, les gouvernails ne peuvent pivoter que d'un angle maximal donné, et ainsi de suite. Cela explique l'appartenance des commandes $\mathbf{u}$ à un ensemble fermé. Autrement dit, *les commandes sont bornées*: le point $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)$ ne peut se trouver qu'à l'intérieur de U ou à sa frontière. On peut cependant considérer à titre de cas particulier des commandes non bornées. On appelle *commandes admissibles* n'importe quelles fonctions continues par morceaux $u_s(t)$ $(s = 1, \ldots, r)$ à valeurs dans l'ensemble U.

Supposons qu'une propriété déterminée du processus du mouvement commandé (10.3.1) soit définie par la fonctionnelle

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})\, dt, \tag{10.3.2}$$

où t_0, t_1 sont les instants initial et final du mouvement et $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geqslant 0$ (d'ailleurs ce n'est pas très important). Le problème de l'optimisation du mouvement (10.3.1) se pose alors comme suit: parmi toutes les commandes admissibles $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ qui font passer le point de phase $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$ au point de phase $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1)$ en accord avec les équations du mouvement (10.3.1), il s'agit de choisir celles qui minimisent la valeur de la fonctionnelle (10.3.2).

La méthode la plus usitée dans les problèmes de la commande optimale est le principe du maximum de Pontriaguine. On en trouve les énoncés formels et les démonstrations rigoureuses dans les monographies [10.5, 10.6]. Ce qui nous intéresse, pour le moment, c'est l'appareil formel de solution des problèmes de la commande optimale.

Introduisons un vecteur auxiliaire

$$\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n), \tag{10.3.3}$$

où ψ_0 est une constante, $\psi_0 \leqslant 0$, et $\psi_1, \ldots, \psi_n$ sont des fonctions du temps $\psi_i = \psi_i(t)$.

Utilisant les seconds membres des équations (10.3.1), la fonction f_0 et le vecteur ψ (10.3.3), construisons la fonction

$$\mathcal{H} = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{10.3.4}$$

Remarquons que les équations (10.3.1) se laissent alors écrire ainsi:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.3.5}$$

Définissons à présent les fonctions $\psi_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, par les équations différentielles

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{10.3.6}$$

Il se trouve que pour que le processus de transition de $\mathbf{x}_0$ à $\mathbf{x}_1$ soit optimal (au sens du minimum de la fonctionnelle (10.3.2)) pour $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, il faut que le système (10.3.6) admette une solution non triviale et qu'il existe une constante $\psi_0 \leqslant 0$ telles que la condition du maximum

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{\psi}(\tau),\ \mathbf{x}(\tau),\ \mathbf{u}(\tau)) = \max_{v \in U} \mathscr{H}(\boldsymbol{\psi}(\tau),\ \mathbf{x}(\tau),\ v) \qquad (10.3.7)$$

soit vérifiée à chaque instant τ, où $t_0 \leqslant \tau \leqslant t_1$.

Ainsi donc, la commande optimale $\mathbf{u}$ se définit au départ de la condition (10.3.7), pratiquement en fonction de $\boldsymbol{\psi}$ et de $\mathbf{x}$; cela permet de construire ensuite la trajectoire optimale en intégrant ensemble les équations (10.3.6) et (10.3.5) (ou (10.3.1), ce qui revient au même). Le plus souvent, le point le plus délicat consiste à s'établir sur des données initiales convenables pour l'intégration de (10.3.6).

Remarquons que le système (10.3.5)-(10.3.6) est d'ordre $2n$; sa solution dépend donc de $2n$ constantes arbitraires, ce qui permet en réalité de satisfaire à $2n$ conditions aux limites

$$\mathbf{x}_i(t_0) = \mathbf{x}_{i0},\ \mathbf{x}_i(t_1) = \mathbf{x}_{i1} \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Le principe du maximum de Pontriaguine ne fournit que les conditions nécessaires de l'optimalité. Cette condition est nécessairement vérifiée dans les processus optimaux. Il se peut cependant que le processus ne soit pas optimal bien que le principe du maximum soit vérifié. Les problèmes solutionnés par le principe du maximum demandent donc généralement à être contrôlés pour s'assurer que les conditions d'optimalité dégagées sont suffisantes. Assez souvent (par exemple dans les problèmes linéaires) le principe du maximum procure en même temps les conditions suffisantes : on doit se rappeler cependant qu'il n'en est pas ainsi pour chaque problème.

4. L'équation du vol optimal

Considérons le mouvement de la fusée de masse m dans un champ de forces dérivant d'un potentiel $\overline{U}$. Introduisons les notations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\overline{U}}{m} = U(x,\ y,\ z), \quad \operatorname{grad} U = \left(\frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial U}{\partial y},\ \frac{\partial U}{\partial z}\right), \\ &\mathbf{r} = (x,\ y,\ z), \quad \mathbf{V} = (u,\ v,\ w), \quad \mathbf{f} = (f_x,\ f_y,\ f_z). \end{aligned}\right\} \qquad (10.4.1)$$

Ici x, y, z sont les coordonnées de la fusée, u, v, w les composantes de sa vitesse, et f_x, f_y, f_z celles de l'accélération communiquée par le moteur. Les équations du mouvement s'écriront alors sous forme vectorielle comme suit :

$$\dot{\mathbf{V}} - \operatorname{grad} U = \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}. \qquad (10.4.2)$$

Supposons que la puissance de la veine gazeuse soit constante. On cherche alors les trajectoires assurant le minimum de la fonctionnelle (10.2.6). Imposons des restrictions additionnelles à l'accélération :

$$-a \leqslant f_x \leqslant a, \quad -a \leqslant f_y \leqslant a, \quad -a \leqslant f_z \leqslant a. \qquad (10.4.3)$$

Construisons, en accord avec (10.3.4), la fonction

$$\mathscr{H} = -(f_x^2 + f_y^2 + f_z^2) + \psi_u \left(f_x + \frac{\partial U}{\partial x}\right) + \psi_x u +$$

$$+ \psi_v \left(f_y + \frac{\partial U}{\partial y}\right) + \psi_y v + \psi_w \left(f_z + \frac{\partial U}{\partial z}\right) + \psi_z w \qquad (10.4.4)$$

en mettant $\psi_0 = -1$; on pourrait prendre d'ailleurs n'importe quel $\psi_0 < 0$, quitte à définir en conséquence $\psi_x, \psi_y, \ldots, \psi_w$.

Conformément au principe du maximum (10.3.7), les commandes de f_x, f_y, f_z sont optimales si elles font passer par le maximum la fonction $\mathscr{H}$ (10.4.4). Puisque toutes les commandes interviennent dans $\mathscr{H}$ de la même façon , il suffit d'en considèrer une au choix, par exemple celle de f_x. La variation de $\mathscr{H}$ en fonction de f_x est illustrée sur la figure 10.1 (pour $\psi_u > 0$; pour $\psi_u < 0$, on obtient une courbe symétrique par rapport à l'axe $\mathscr{H}$). Nous voyons que le maximum de la fonction $\mathscr{H}$ a lieu pour $f_x = \psi_u/2$ si $|\psi_u/2| \leqslant a$ (fig. 10.1, *a*) et pour $f_x = a$ si $|\psi_u/2| > a$ (fig 10.1, *b*). Il en est de même pour f_y et f_z. La commande optimale se définit donc par des formules du type

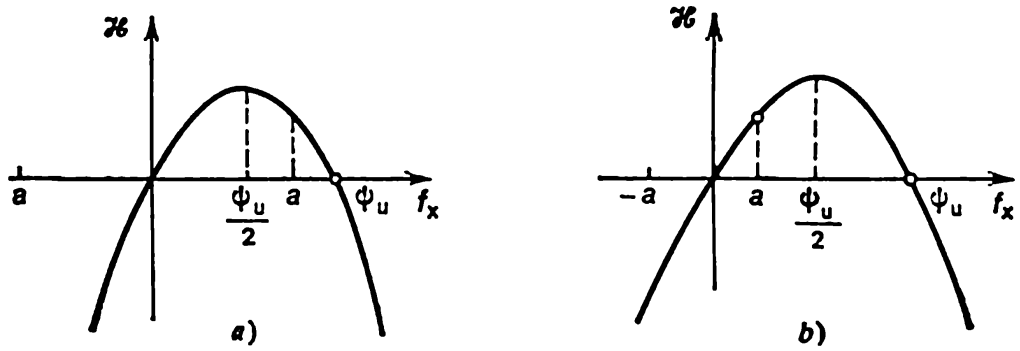


Fig. 10.1. Pour la construction de la commande optimale

$$f_x = \begin{cases} a & \text{si} \quad \psi_u/2 > a, \\ \psi_u/2 & \text{si} \quad |\psi_u/2| \leqslant a, \\ -a & \text{si} \quad \psi_u/2 < -a. \end{cases} \qquad (10.4.4')$$

Les relations pour f_y, f_z s'écrivent d'une façon analogue. La figure 10.2 représente à titre d'exemple la variation de f_x en fonction de ψ_u. En accord avec les formules (10.3.6) et (10.4.4'), les valeurs de

ψ doivent vérifier le système d'équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\psi_x}{dt} = -\left(\psi_u \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \psi_v \frac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} + \psi_w \frac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x}\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{d\psi_u}{dt} = -\psi_x, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (10.4.5)$$

Les points remplacent ici des équations analogues écrites pour d'autres variables ψ. Sous forme vectorielle, les équations (10.4.5) s'écrivent ainsi :

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{r}} + A\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{v}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{v}} = -\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{r}}, \qquad (10.4.6)$$

$$A = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial x\, \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial y\, \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial z\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2} \end{Vmatrix},$$

$\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{r}}$ est un vecteur de composantes ψ_x, ψ_y, ψ_z, et $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{v}}$ un vecteur de composantes ψ_u, ψ_v, ψ_w. Les équations (10.4.2), (10.4.4'), (10.4.6) for-

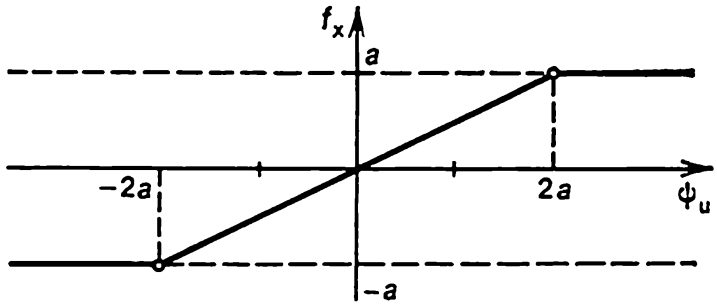


Fig. 10.2. Commande optimale

ment un système fermé des équations du vol optimal (au sens du minimum de l'intégrale (10.2.6)) de la fusée, compte tenu des restrictions (10.4.3) imposées aux commandes.

L'avantage majeur du principe du maximum de Pontriaguine est qu'il permet de prendre en compte d'une façon simple et uniforme les différentes restrictions imposées aux commandes lors du calcul des mouvements optimaux. Cela est très important pour les problèmes contemporains de mécanique. Sur l'exemple des équations (10.4.2), (10.4.4'), (10.4.6) nous avons montré l'efficacité du formalisme du principe du maximum. Dans le texte qui suit, afin de simplifier le raisonnement, nous supprimerons cependant toute contrainte imposée aux commandes de f_x, f_y, f_z (on a $a = \infty$). Cela équi-

vaut à considérer les seules trajectoires sur lesquelles la condition de commande optimale ne demande pas que les composantes de l'accélération prennent la valeur limite $a \neq \infty$.

5. Laissons tomber toute contrainte

On voit alors sans peine de (10.4.4) que la commande optimale se définit par la formule vectorielle

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{v}}/2;$$

au lieu des équations (10.4.6), on peut donc écrire directement des équations différentielles de la commande optimale ! Associées à (10.4.2), elles formeront le système fermé des équations du vol optimal qui s'écrira comme suit :

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{\mathbf{r}} - \operatorname{grad} U = \mathbf{f}, \\ &\ddot{\mathbf{f}} - A\mathbf{f} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (10.5.1)$$

La matrice A est la même que dans (10.4.6).

Précédemment nous avions convenu de négliger l'attraction des planètes en seconde phase du vol interplanétaire. Par conséquent les conditions aux limites pour le problème (10.5.1) se confondent à peu près avec les conditions de départ d'une planète (à attraction nulle !) à une certaine vitesse initiale par rapport à cette planète, l'arrivée à une autre planète s'effectuant à une certaine vitesse par rapport à cette dernière. On peut admettre que les vitesses relatives de départ et d'arrivée sont nulles, car elles sont négligeables au regard de la vitesse d'entraînement du mouvement des planètes elles-mêmes. Nous prendrons donc désormais comme conditions aux limites les coordonnées et les composantes de la vitesse de la planète de départ (supposons que ce soit la Terre) et de la planète d'arrivée (par exemple Mars).

Il convient de choisir les douze constantes d'intégration du système (10.5.1) de façon que les douze conditions aux limites suivantes soient vérifiées :

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{r} = \mathbf{r}^0, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^0 \quad \text{pour} \quad t = t_0, \\ &\mathbf{r} = \mathbf{r}^1, \quad \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}^1 \quad \text{pour} \quad t = t_1. \end{aligned}\right\} \qquad (10.5.2)$$

Le système (10.5.1) admet naturellement comme intégrale première

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0, \qquad (10.5.3)$$

où $\mathscr{H}$ se définit par (10.4.4) en y remplaçant ψ_u, ψ_v, ψ_w respectivement par $2f_x$, $2f_y$, $2f_z$ et ψ_x, ψ_y, ψ_z respectivement par $-2\dot{f}_x$, $-2\dot{f}_y$,

$-2\dot{f}_z$. Si l'on impose à la fonction de forces U une condition supplémentaire selon laquelle U caractérise un champ de forces centrales (ce qui est précisément le cas en l'occurrence), les équations (10.5.1) admettront trois autres intégrales premières qui équivalent ensemble à une intégrale vectorielle:

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{f}} + \mathbf{f} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{k}. \tag{10.5.4}$$

Or, les intégrales (10.5.3), (10.5.4) ne suffisent pas à intégrer complètement le système (10.5.1); il semble que ce système n'est pas intégrable *). On est donc amené à chercher des méthodes de résolution approchées du problème aux limites (10.5.1)-(10.5.2).

6. Méthode de la trajectoire de transport

Le problème aux limites (10.5.1)-(10.5.2) peut être résolu numériquement sur ordinateur. On s'établit sur une solution approximative connue et on l'utilise comme première approximation de la méthode itérative. Dans les problèmes aux limites non linéaires on est presque toujours obligé de passer par des approximations successives; leur réalisation sur ordinateur est trop lente et ne permet pas d'obtenir des résultats exploitables dans un délai raisonnable.

Les méthodes numériques sont toujours à notre disposition. Nous allons cependant essayer de trouver une autre méthode de résolution, au moins pour une sous-classe suffisamment vaste de problèmes aux limites (10.5.1)-(10.5.2) si ce n'est pour leur totalité. Si nous arrivons à obtenir une solution analytique approchée, elle peut toujours servir de première approximation pour la résolution itérative numérique du problème aux limites précis.

T. Eneiev a proposé d'employer en dynamique du vol à faible poussée une méthode qu'il a appelée *méthode des trajectoires de transport.*

On envisage un voyage interplanétaire qui consiste à quitter la planète de départ à l'instant t_0 et à débarquer sur la planète d'arrivée à l'instant t_1. Cherchons d'abord une trajectoire képlérienne ordinaire qui convienne à cette mission. Cela est toujours possible, car on sait que les équations du mouvement képlérien sont intégrables. Une fois le problème aux limites résolu pour le cas considéré, on se trouve en possession d'une trajectoire elliptique qui passe par les points de départ et d'arrivée aux instants t_0 et t_1 respectivement. Le vol à faible poussée qui nous intéresse doit se produire suivant

*) Le seul fruit des efforts de l'auteur est une solution particulière de (10.5.1), à savoir $\mathbf{f} = \frac{2\beta}{2+\beta t}\mathbf{V}$, où β est une constante arbitraire. Il va de soi que cette commande optimale ne convient pas à n'importe quel problème de vol optimal mais seulement à un cas où l'on a sept conditions aux limites au lieu de douze.

une trajectoire qui ne se distingue pas outre mesure de la trajectoire képlérienne calculée. En effet, la durée du vol n'étant pas grande, la petite poussée « n'aura pas le temps » simplement de faire dévier sensiblement la trajectoire réelle de la trajectoire képlérienne choisie. La trajectoire képlérienne entraîne pour ainsi dire la trajectoire réelle à sa suite. Une telle trajectoire képlérienne sera appelée *trajectoire de transport*. Le système de coordonnées attaché à un point animé d'un mouvement de translation le long de la trajectoire de transport s'appelle *système de coordonnées de transport*.

L'idée de la méthode consiste à analyser le mouvement de l'engin à faible poussée par rapport au système de coordonnées de transport. On comprend aisément que la trajectoire d'un tel mouvement relatif ne s'éloigne jamais trop loin de l'origine des coordonnées, ce qui permet de linéariser le problème aux limites et de le résoudre complètement. Ce processus est décrit dans [10.1] par V. Béletski et V. Egorov. Nous supposerons, d'après [10.1], que la trajectoire du mouvement soit

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\rho}, \tag{10.6.1}$$

où $\mathbf{r}_0$ est une trajectoire de transport calculée et $|\boldsymbol{\rho}|$ est faible devant $|\mathbf{r}_0|$. La fonction vectorielle $\mathbf{r}_0(t)$ vérifie l'équation du mouvement non perturbé

$$\ddot{\mathbf{r}}_0 - \operatorname{grad} U_0 = 0, \tag{10.6.2}$$

où U_0 est la valeur de la fonction de forces U le long de la trajectoire de transport $\mathbf{r}_0(t)$. Portons (10.6.1) dans (10.5.1), développons $U(x, y, z)$ en série et supprimons les termes petits d'ordre égal ou supérieur à 2. En plus, $\mathbf{f}$ est par définition aussi petit que $\boldsymbol{\rho}$ et $\dot{\boldsymbol{\rho}}$; on peut donc négliger aussi les termes de la forme $\boldsymbol{\rho}\mathbf{f}$, etc. Compte tenu de (10.6.2), on obtient au lieu de (10.5.1) un système linéarisé

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} - A_0\boldsymbol{\rho} = \mathbf{f}, \tag{10.6.3}$$

$$\ddot{\mathbf{f}} - A_0\mathbf{f} = 0. \tag{10.6.4}$$

Ici A_0 est la valeur de la matrice A le long de la trajectoire de transport $\mathbf{r}_0(t)$; la matrice $A_0(t)$ contient des fonctions périodiques connues du temps.

Un système linéaire de tout ordre est intégrable si les coefficients de sa partie homogène sont constants; il n'en est pas question en l'occurrence. Un système linéaire à coefficients variables n'est pas intégrable en général. Par contre, notre système (10.6.3)-(10.6.4) doit l'être absolument ! (Nous avions cette « arrière-pensée » en introduisant les coordonnées de transport.) En effet, supposons un instant que $\mathbf{f} \equiv 0$ dans le système (10.6.3)-(10.6.4); ce qui reste de l'équation vectorielle (10.6.3) (son premier membre) doit alors admettre comme solution une variation du mouvement képlérien !

Le mouvement képlérien se laisse décrire par quadratures : il en est donc de même de sa variation. Ensuite, l'équation vectorielle (10.6.4) est de la même forme que l'équation (10.6.3) dont le second membre a été annulé ; autrement dit, (10.6.4) est aussi intégrable ! Calculant sa solution $\mathbf{f}(t)$ et la portant dans le second membre de (10.6.3), on aboutit à une équation vectorielle non homogène dont le second membre est une fonction connue du temps ; l'équation homogène correspondante est intégrable. On sait que pareilles équations sont résolubles par quadratures (par exemple, à l'aide de la méthode de variation des constantes). Ainsi donc, le système (10.6.3)-(10.6.4) se laisse intégrer par quadratures.

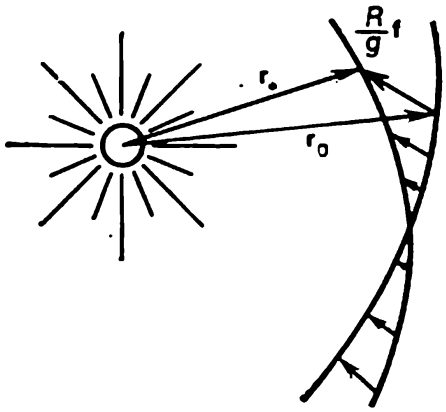


Fig. 10.3. La commande optimale en approximation linéaire

Ces considérations (et celles de la dimension) permettent de conclure, d'ailleurs, que dans l'approximation considérée la commande optimale du vecteur accélération de poussée est définie par la formule

$$\mathbf{f} = \alpha \frac{g}{R} (\mathbf{r}_* - \mathbf{r}_0), \qquad (10.6.5)$$

où $\mathbf{r}_0(t)$ définit l'orbite elliptique képlérienne de transport, $\mathbf{r}_*(t)$ l'orbite elliptique képlérienne dont les paramètres sont déterminés par les conditions aux limites du problème, g est l'accélération de l'attraction newtonienne à la distance R du centre d'attraction et $\alpha \sim 1$ une constante scalaire sans dimension. On voit sur la figure 10.3 un schéma qui illustre la formule (10.6.5).

Un peu plus tard nous ferons l'intégration pratique du système (10.6.3)-(10.6.4).

7. Schéma de résolution du problème aux limites

L'intérêt des équations linéaires (10.6.3)-(10.6.4) ne réside pas seulement dans leur intégrabilité : elles permettent de résoudre le problème aux limites pour aisni dire d'un seul coup, sans passer par les approximations successives, ce qui est impossible en général pour un problème non linéaire.

Compte tenu de (10.6.1), mettons les conditions aux limites (10.5.2) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_0, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_0 \quad \text{pour} \quad t = t_0, \\ \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}_f, \quad \dot{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}_f \quad \text{pour} \quad t = t_1 \end{aligned}\right\} \qquad (10.7.1)$$

Ici

$$\left.\begin{aligned} \rho_0 &= \mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_0(t_0), & \dot{\rho}_0 &= \dot{\mathbf{r}}^0 - \dot{\mathbf{r}}_0(t_0), \\ \rho_f &= \mathbf{r}^f - \mathbf{r}_0(t_1), & \dot{\rho}_f &= \dot{\mathbf{r}}^f - \dot{\mathbf{r}}_0(t_1). \end{aligned}\right\} \tag{10.7.2}$$

Puisque la trajectoire de transport $\mathbf{r}(t)$, $\dot{\mathbf{r}}(t)$ est connue à chaque instant, on définit sans peine les conditions aux limites du mouvement relatif (10.7.1) en fonction des conditions aux limites (10.5.2) du mouvement absolu à l'aide des formules (10.7.2).

Le schéma d'intégration du système (10.6.3)-(10.6.4) et de résolution du problème aux limites (10.7.1) peut être décrit de la façon suivante. Désignons par ρ un vecteur à six dimensions qui englobe les coordonnées et les composantes des vitesses. La solution de (10.6.3) peut être cherchée alors sous la forme

$$\rho = \rho_* + \rho_{**}, \tag{10.7.3}$$

où ρ_* est la solution du système (10.6.3) homogène et ρ_{**} une solution particulière du système (10.6.3) non homogène.

Soient ρ_i des solutions particulières linéairement indépendantes du système (10.6.3) homogène. Elles doivent être connues, puisque la variation du mouvement képlérien est connue. Alors

$$\rho_* = \sum_{i=1}^{6} c_i \rho_i, \tag{10.7.4}$$

où c_i sont des constantes d'intégration. Il ressort clairement de ce qui précède que la solution du système (10.6.4) est une autre combinaison linéaire des même fonctions ρ_i :

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{6} a_i \rho_i, \tag{10.7.5}$$

où a_i sont d'autres constantes d'intégration. Il va sans dire que la grandeur $\mathbf{f}$ dans (10.7.5) est déjà un vecteur à six dimensions qui englobe les composantes de l'accélération et les dérivées de ces composantes par rapport au temps.

Portons maintenant (10.7.5) dans (10.6.3) et cherchons par la méthode de variation des constantes une solution particulière

$$\rho_{**} = \sum_{i=1}^{6} a_i \varphi_i, \tag{10.7.6}$$

en choisissant ρ_{**} de telle façon que

$$\rho_{**}(t_0) = 0,$$

c'est-à-dire que

$$\varphi_i(t_0) = 0. \tag{10.7.7}$$

Compte tenu de (10.7.4) et de (10.7.3), nous obtenons définitivement

$$\rho = \sum_{i=1}^{6} (c_i \rho_i + a_i \varphi_i). \tag{10.7.8}$$

Les constantes arbitraires c_i, a_i permettent de satisfaire aux douze conditions aux limites (10.7.1). En effet, les constantes c_i, a_i se déduisent du système suivant d'équations algébriques linéaires:

$$\rho_0 = \sum_{i=1}^{6} c_i \rho_i (t_0), \tag{10.7.9}$$

$$\rho_1 - \sum_{i=1}^{6} c_i \rho_i (t_1) = \sum_{i=1}^{6} a_i \varphi_i (t_1) \tag{10.7.10}$$

(rappelons que ρ, ρ_i, φ_i sont des vecteurs à six dimensions et que φ_i vérifie (10.7.7)). D'abord on déduit c_i de (10.7.9), puis on résout (10.7.10) et l'on obtient a_i.

L'algorithme que nous venons d'écrire permet de résoudre complètement le problème aux limites (10.6.3), (10.6.4), (10.7.1).

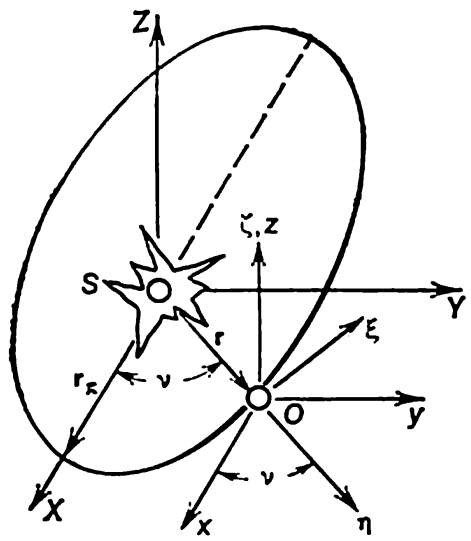


Fig. 10.4. Systèmes de coordonnées

8. Intégration

Choisissons un système de coordonnées absolues XYZ d'origine S au centre d'attraction, de telle façon que le plan XY se confonde avec le plan de la trajectoire de transport et que l'axe X soit dirigé au péricentre de cette trajectoire. Les axes du système de coordonnées de transport $Oxyz$ sont respectivement parallèles à ceux du système XYZ (fig. 10.4). Admettons que les équations du mouvement (10.6.3) et celles de la commande (10.6.4) soient écrites au moyen de variables sans dimension. Si les quantités R, V, T, f_d ont la dimension de la distance, de la vitesse, du temps et de l'accélération de poussée respectivement, les quantités correspondantes sans dimension r, v, t, f seront définies comme suit:

$$r = \frac{R}{R_0}, \quad v = \frac{V}{\sqrt{gR_0}}, \quad t = T\sqrt{\frac{g}{R_0}}, \quad f = \frac{f_d}{g}, \tag{10.8.1}$$

où R_0 est la distance initiale du centre d'attraction, $g = \mu/R_0^2$ l'accélération de la pesanteur à cette distance.

Les coordonnées et les variables sans dimension étant choisies de cette façon, les éléments de la matrice A_0 dans les équations (10.6.3), (10.6.4) s'écrivent

$$\left.\begin{aligned} &U^0_{xx}=\frac{1}{r_0^3}(3\cos^2\nu-1), \quad U^0_{yy}=\frac{1}{r_0^3}(3\sin^2\nu-1),\\ &U^0_{zz}=-\frac{1}{r_0^3}, \quad U^0_{xy}=\frac{3\cos\nu\sin\nu}{r_0^3}, \quad U^0_{xz}=U^0_{yz}=0,\end{aligned}\right\} \tag{10.8.2}$$

où $r_0(t)$ est le rayon courant de la trajectoire de transport et ν l'anomalie vraie le long de cette trajectoire. Ces deux dernières quantités vérifient ensemble les relations du mouvement képlérien

$$r_0=\frac{p}{1+e\cos\nu}, \quad \frac{d\nu}{dt}=\frac{\sqrt{p}}{r_0^2}. \tag{10.8.3}$$

Dans les formules (10.8.3) e est l'excentricité de la trajectoire de transport et p son demi-paramètre focal sans dimension.

Afin d'intégrer plus commodément le système (10.6.3)-(10.6.4), il y a intérêt à passer à un système de coordonnées tournant $O\eta\xi\zeta$ dont l'origine se confond avec le point O de la trajectoire de transport (fig. 10.4), l'axe $O\eta$ est dirigé suivant le rayon vecteur, l'axe $O\xi$ est orienté transversalement à la trajectoire de transport (dans le sens du mouvement) et l'axe $O\zeta$ se confond avec Oz. Alors

$$\left.\begin{aligned} x&=\eta\cos\nu-\xi\sin\nu,\\ y&=\eta\sin\nu+\xi\cos\nu,\\ z&=\zeta\end{aligned}\right\} \tag{10.8.4}$$

et, après quelques transformations, les équations (10.6.3) s'écriront sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &\ddot\eta-2\omega\dot\xi-\omega^2\eta-\dot\omega\xi-\frac{2}{r_0^3}\eta=f_\eta,\\ &\ddot\xi+2\omega\dot\eta-\omega^2\xi+\dot\omega\eta+\frac{1}{r_0^3}\xi=f_\xi,\\ &\ddot\zeta+\frac{1}{r_0^3}\zeta=f_\zeta.\end{aligned}\right\} \tag{10.8.5}$$

Ici $\omega=\dot\nu$ est la vitesse angulaire du mouvement le long de la trajectoire de transport, f_η, f_ξ, f_ζ les projections du vecteur accélération de poussée sur les axes $O\eta$, $O\xi$, $O\zeta$. On pourrait d'ailleurs écrire (10.8.5) immédiatement, à partir des équations générales du mouvement relatif.

Remarquons que les coefficients dans (10.8.5) ne dépendent du temps que par l'entremise de l'anomalie vraie ν. Il est donc tout à fait logique, en utilisant les relations (10.8.3), de passer dans (10.8.5) de la variable indépendante t à la nouvelle variable indépendante ν.

Ceci fait, on obtient au lieu de (10.8.5) le système

$$\left.\begin{aligned} \eta'' - \frac{2\rho'}{\rho}\eta' - 2\xi' - (1+2\rho)\eta + \frac{2\rho'}{\rho}\xi &= p^3\rho^4 f_\eta, \\ \xi'' - \frac{2\rho'}{\rho}\xi' + 2\eta' - (1-\rho)\xi - \frac{2\rho'}{\rho}\eta &= p^3\rho^4 f_\xi, \\ \zeta'' - \frac{2\rho'}{\rho}\zeta' + \rho\zeta &= p^3\rho^4 f_\zeta. \end{aligned}\right\} \quad (10.8.6)$$

Ici et dans le texte qui suit, on a

$$\rho = (1 + e\cos\nu)^{-1}, \quad \rho' = e\sin\nu\,(1 + e\cos\nu)^{-2}. \qquad (10.8.7)$$

L'apostrophe désigne la dérivation par rapport à ν.

Oublions un instant que les composantes f_η, f_ξ, f_ζ vérifient dans notre problème l'équation différentielle (10.6.4) et supposons que ce soient des fonctions arbitraires mais connues de l'anomalie vraie ν.

Dans le système fermé (10.8.6) ainsi obtenu, les coefficients explicités sont des fonctions périodiques de la nouvelle variable indépendante ν. Ainsi écrit, ce système paraît effrayant, mais, sachant qu'il est intégrable, nous ne nous laisserons pas intimider et nous passerons à l'intégration.

La troisième équation de (10.8.6) ne dépend pas des deux premières; nous commencerons donc par elle. Tout d'abord essayons de nous débarrasser du terme qui contient la dérivée première ζ'. De la théorie des équations différentielles linéaires, on sait qu'il est toujours possible de le faire à l'aide de la substitution

$$\zeta = \varkappa e^{-\frac{1}{2}\int p_1\,d\nu} \qquad (10.8.8)$$

dans laquelle p_1 est le coefficient de ζ' et $\varkappa$ une nouvelle variable qui vient remplacer ζ. Dans notre cas $p_1 = -2\rho'/\rho$, si bien que la substitution (10.8.8) s'écrit

$$\zeta = \varkappa\rho. \qquad (10.8.9)$$

Portons (10.8.9) dans la troisième équation (10.8.6). Il vient

$$\varkappa'' + \left[\rho - 2\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho''}{\rho}\right]\varkappa = p^3\rho^3 f_\zeta. \qquad (10.8.10)$$

Or, d'après (10.8.7) on a

$$\rho - 2\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^2 + \frac{\rho''}{\rho} = 1,$$

et l'équation (10.8.10) prend une forme simple qui se prête immédiatement à l'intégration:

$$\varkappa'' + \varkappa = p^3\rho^3 f_\zeta. \qquad (10.8.11)$$

L'équation homogène associée à (10.8.11) a comme solution

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= c_5 \sin \nu + c_6 \cos \nu, \\ \varkappa' &= c_5 \cos \nu - c_6 \sin \nu, \end{aligned}\right\} \qquad (10.8.12)$$

où c_5, c_6 sont des constantes d'intégration.

Suivant la méthode de variation des constantes, proposons-nous de chercher la solution de l'équation (10.8.11) non homogène sous la même forme (10.8.12) pour $\varkappa$ et $\varkappa'$ mais en supposant que c_5 et c_6 dépendent de ν. Nous obtiendrons alors, par un procédé connu, un système d'équations pour les dérivées de $c_5(\nu)$ et de $c_6(\nu)$:

$$\frac{dc_5}{d\nu} \sin \nu + \frac{dc_6}{d\nu} \cos \nu = 0,$$

$$\frac{dc_5}{d\nu} \cos \nu - \frac{dc_6}{d\nu} \sin \nu = p^3 \rho^3 f_\zeta.$$

D'où

$$\frac{dc_5}{d\nu} = p^3 \rho^3 f_\zeta \cos \nu,$$

$$\frac{dc_6}{d\nu} = -p^3 \rho^3 f_\zeta \sin \nu.$$

Intégrons ces égalités, substituons les résultats dans (10.8.12) et revenons à la variable initiale ζ conformément à (10.8.9). Il vient

$$\zeta = c_5 \rho \sin \nu + c_6 \rho \cos \nu + \\ + p^3 \rho \left[\sin \nu \int f_\zeta \rho^3 \cos \nu \, d\nu - \cos \nu \int f_\zeta \rho^3 \sin \nu \, d\nu \right]. \qquad (10.8.13)$$

La troisième équation de (10.8.6) est intégrée. On déduit de (10.8.13) tout aussi facilement — par dérivation — la formule explicite de ζ'.

Nous voulons cependant connaître la « technologie » de l'intégration du système (10.8.6), plutôt qu'établir une liste complète des formules de calcul (une telle liste se trouve dans notre travail [10.1] que nous reprenons ici). Nous signalons donc que l'expression explicite de $\zeta'(\nu)$ est dans [10.1] et nous passons à la discussion des deux premières équations de (10.8.6).

La substitution (10.8.9) nous a beaucoup aidé à résoudre la troisième équation. Il est logique d'essayer une substitution analogue pour les deux premières:

$$\xi = \rho\alpha, \quad \eta = \rho\beta. \qquad (10.8.14)$$

Les équations en question deviennent alors

$$\beta'' - 3\rho\beta - 2\alpha' = p^3 \rho^3 f_\eta, \quad \alpha'' + 2\beta' = p^3 \rho^3 f_\xi. \qquad (10.8.15)$$

La substitution (10.8.14) s'est avérée fructueuse: on peut intégrer immédiatement une fois la seconde équation de (10.8.15). Il

vient

$$\alpha' = c_1 - 2\beta + I_\xi, \quad I_\xi = p^3 \int \rho^3 f_\xi \, d\nu, \tag{10.8.16}$$

où c_1 est une nouvelle constante d'intégration et $I_\xi(\nu_0) = 0$ par définition. Portons à présent l'expression de α' (10.8.16) dans la première des équations (10.8.15):

$$\beta'' + (4 - 3\rho)\beta = \Phi(\nu), \tag{10.8.17}$$

où

$$\Phi(\nu) = 2c_1 + 2I_\xi + p^3\rho^3 f_\xi. \tag{10.8.18}$$

On ne voit pas très bien à quoi peut servir l'équation (10.8.17). Revenons cependant à notre ancienne variable η (la substitution (10.8.14) a déjà fait son affaire). Au lieu de (10.8.17), nous obtenons l'équation

$$(1 + e\cos\nu)\,\eta'' - 2e\sin\nu\eta' + (1 + 3e\cos\nu)\,\eta = \Phi. \tag{10.8.19}$$

On n'a pas besoin de contempler longtemps cette équation pour découvrir une solution particulière de l'équation homogène associée:

$$\eta_2 = \sin\nu. \tag{10.8.20}$$

Or, on apprend en théorie des équations différentielles linéaires que l'équation

$$\eta'' + a_1(\nu)\,\eta' + a_2(\nu)\,\eta = 0$$

admet, en plus de la solution particulière $\eta = \eta_2$, une autre solution particulière, linéairement indépendante de la première et définie par la formule

$$\eta_3 = \eta_2 \int \eta_2^{-2} e^{-\int a_1 \, d\nu} \, d\nu.$$

Dans notre cas

$$a_1 = -\frac{2e\sin\nu}{1 + e\cos\nu},$$

et η_2 se définit par (10.8.20). La seconde solution particulière de l'équation homogène en question sera donc

$$\eta_3 = I^* \sin\nu, \quad I^* = \int \frac{\rho^2}{\sin^2\nu} \, d\nu. \tag{10.8.21}$$

La quadrature I^* se laisse calculer sous forme explicite [10.1], mais l'expression de $I^*(\nu)$ est un peu encombrante. Pour simplifier les choses, laissons $I^*(\nu)$ sous la forme compacte (10.8.21) et indiquons seulement qu'en orbite circulaire ($e = 0$, $\rho = 1$) on a $I^*(\nu) = -\operatorname{cotg}\nu$ et qu'à la première puissance de l'excentricité près on a

$$I^*(\nu)\sin\nu \approx -\cos\nu + 2e. \tag{10.8.22}$$

On connaît ainsi deux solutions particulières de l'équation homogène. La méthode déjà connue de variation des constantes permet donc d'obtenir la solution générale de l'équation (10.8.19). Elle est de la forme

$$\left.\begin{aligned}
\eta &= \frac{c_1}{e}(I^* \sin \nu + \cos \nu) + c_2 \sin \nu + c_3 I^* \sin \nu + \\
&\qquad + F_2 \sin \nu + I^* F_3 \sin \nu, \\
F_2 &= -p^3 \int \frac{I^* \sin \nu}{\rho} \left(\frac{2I_\xi}{p^3} + \rho^3 f_\eta\right) d\nu, \\
F_3 &= p^3 \int \frac{\sin \nu}{\rho} \left(\frac{2I_\xi}{p^3} + \rho^3 f_\eta\right) d\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{10.8.23}$$

Il reste à déterminer $\xi(\nu)$. Revenons à l'équation (10.8.16). Puisque $\eta(\nu)$ et par suite $\beta(\nu) = \eta/\rho$ sont connus, on obtient par une seule quadrature

$$\alpha = c_1 \nu - 2 \int \frac{\eta}{\rho} d\nu + \int I_\xi \, d\nu + c_4. \tag{10.8.24}$$

Compte tenu de (10.8.14) et de (10.8.23), on a

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3 + c_4 \xi_4 + \rho \Psi, \\
\xi_1 &= \rho \left(\nu - \frac{2}{e} \int \frac{I^* \sin \nu + \cos \nu}{\rho} d\nu\right), \\
\xi_2 &= \rho (2 + e \cos \nu) \cos \nu, \\
\xi_3 &= -2 \int \frac{I^* \sin \nu}{\rho} d\nu, \quad \xi_4 = \rho, \\
\Psi &= \int \left[I_\xi - \frac{2}{\rho}(F_2 \sin \nu + I^* F_3 \sin \nu)\right] d\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{10.8.25}$$

Les expressions pour η' et ξ' se déduisent par dérivation de (10.8.23) et (10.8.25). L'intégration par quadratures du système (10.8.6) est terminée.

Les quadratures intervenant dans ξ_1 et ξ_3 sont calculables sous forme finie; on trouve ces expressions explicites dans la liste récapitulative des formules de calcul insérée dans [10.1]. En ce qui concerne les formules explicites de I_ξ, F_2, F_3 et Ψ, elles ne sont pas faciles à établir en général. Tout dépend de la forme des commandes f_η, f_ξ, f_ζ. Si l'on a beaucoup de calculs pratiques à faire, il est conseillé généralement de procéder par des méthodes numériques, mais il peut y avoir aussi des cas où les quadratures indiquées pourront être explicitées.

La difficulté de l'intégration du système (10.8.6) que nous venons d'effectuer tient au fait que ses coefficients sont variables, ou, ce qui revient au même, au caractère elliptique de la trajectoire de transport. On était donc amené à résoudre (10.8.6) en se donnant des

valeurs arbitraires de l'excentricité $e < 1$. En revanche, les formules obtenues peuvent servir directement (et elles ont servi effectivement, dans [10.1-10.4]) au calcul des trajectoires du vol interplanétaire piloté à poussée arbitraire (en particulier à poussée optimale).

9. Sur les problèmes du mouvement relatif

Les formules établies revêtent cependant une signification beaucoup plus générale. Elles permettent de résoudre toute une classe de problèmes sur le mouvement relatif de corps cosmiques rapprochés, ainsi que d'autres problèmes. Citons-en quelques-uns.

1. *Variation du mouvement képlérien et dérivées isochrones.* Aucune trajectoire calculée à l'avance ne peut être réalisée avec une précision absolue, à cause des multiples erreurs (quoique très faibles en général) qui entachent l'exécution de la trajectoire, les hypothèses de départ adoptées lors du calcul, et ainsi de suite. On peut déterminer l'écart de la trajectoire képlérienne réelle du vol interplanétaire par rapport à la trajectoire calculée (appelée aussi nominale) en posant dans les formules utilisées $|\mathbf{f}| \equiv 0$. La trajectoire nominale se présente alors comme celle de transport. Définissant les constantes d'intégration au départ des données initiales et groupant les termes en coordonnées et vitesses initiales (η_0, η_0', etc.), on obtient les expressions des grandeurs appelées *dérivées isochrones* du mouvement képlérien. Les dérivées isochrones jouent un rôle important en théorie du vol spatial : elles permettent de calculer l'écart en chaque coordonnée (ou composante de vitesse) à chaque instant. Si l'écart est trop grand, on donne l'ordre de correction de la trajectoire et l'on calcule l'impulsion de correction nécessaire.

2. *Problème du mouvement d'un corps au voisinage d'un satellite.* Ce peut être le mouvement d'un cosmonaute autour de la station orbitale. Le cosmonaute peut avoir son moteur-fusée individuel ($f \neq 0$) ou se trouver sans moteur ($f = 0$). On révèle ainsi les régimes dangereux (ou les positions dangereuses par rapport à la station) que le cosmonaute doit éviter, au risque de s'éloigner de la station.

3. *Problème du rendez-vous spatial.* On suppose qu'à une étape antérieure un objet spatial a été amené au voisinage de l'autre et l'on concentre l'attention sur l'étape finale : la variation de l'accélération de poussée $\mathbf{f}$ assurant la plus petite vitesse relative de rencontre (arrimage du vaisseau à la station orbitale, assemblage de la station en orbite, etc.) ou une vitesse désirée. Dans ce dernier cas, au lieu de calculer l'accélération de poussée ($f \equiv 0$), on peut chercher l'impulsion (c'est-à-dire les valeurs initiales des composantes de la vitesse) qui garantit la rencontre.

4. *Mouvement d'un nuage de particules* éjectées du satellite, considéré par rapport à ce satellite.

5. *Passage à une orbite fixée* à l'aide d'une impulsion additionnelle

ou d'un appoint de poussée. C'est le problème d'une faible variation de l'orbite initiale du corps cosmique.

6. *Action de courte durée d'un facteur perturbateur sur l'orbite.* Pour un grand nombre de problèmes énumérés, on peut adopter une orbite de transport faiblement elliptique (e petit), voire circulaire. Cela facilite singulièrement les formules de calcul : on peut les écrire à la première puissance de e près, ou même poser $e = 0$. Dans ce dernier cas les équations de départ (10.8.6) ne contiennent dans leurs premiers membres que des coefficients constants ($\rho' = 0$, $\rho = 1$). L'intégration devient beaucoup plus simple. On peut d'ailleurs aussi résoudre le problème en faisant un passage à la limite ($e \to 0$) dans les formules générales (10.8.13), (10.8.23), (10.8.25). Pour lever l'indétermination dans le premier terme de l'expression de η (10.8.23), ainsi que dans l'expression de ξ_1 (10.8.25), il y a lieu d'employer l'égalité approximative (10.8.22). Ceci fait, le passage à la limite $e \to 0$ s'opère très facilement : on pose $I^* = -\operatorname{cotg} \nu$, $\rho = 1$ et $p = 1$. Le résultat — la solution des équations (10.8.6) pour une trajectoire de transport circulaire — s'écrira ainsi :

$$\eta = 2c_1 + c_2 \sin \nu - c_3 \cos \nu + \\ + \sin \nu \int \cos \nu \left(2 \int f_\xi \, d\nu + f_\eta\right) d\nu + \\ + \cos \nu \int \sin \nu \left(2 \int f_\xi \, d\nu + f_\eta\right) d\nu, \qquad (10.9.1)$$

$$\xi = -3c_1 \nu + 2c_2 \cos \nu + 2c_3 \sin \nu + c_4 + \\ + \int \left\{ \int f_\xi \, d\nu - 2 \left[\sin \nu \int \cos \nu \left(2 \int f_\xi \, d\nu + f_\eta\right) d\nu + \right.\right. \\ \left.\left. + \cos \nu \int \sin \nu \left(2 \int f_\xi \, d\nu + f_\eta\right) d\nu \right] \right\} d\nu, \qquad (10.9.2)$$

$$\zeta = c_5 \sin \nu + c_6 \cos \nu + \sin \nu \int f_\zeta \cos \nu \, d\nu + \\ + \cos \nu \int f_\zeta \sin \nu \, d\nu. \qquad (10.9.3)$$

Les quadratures intervenant dans ces formules se prêtent déjà mieux au calcul que dans le cas général d'une trajectoire de transport elliptique. En certains cas (par exemple quand les composantes f_η, f_ξ, f_ζ sont constantes) les quadratures se font sans difficulté aucune.

Dans les formules (10.9.1)-(10.9.3), de même que dans les formules générales de départ (10.8.13), (10.8.23), (10.8.25), nous avons considéré les commandes f_η, f_ξ, f_ζ comme des fonctions arbitraires de l'anomalie vraie ν. Or, le cas le plus intéressant est celui où ces composantes vérifient les équations (10.6.4) de la commande optimale. Suivant le raisonnement développé dans le n° 7 (voir formule (10.7.5))

la solution des équations de la commande optimale s'écrira alors, dans le cas général d'une trajectoire de transport elliptique, sous la forme

$$\left.\begin{aligned} f_\eta &= \frac{a_1}{e}(I^* \sin \nu + \cos \nu) + a_2 \sin \nu + a_3 I^* \sin \nu, \\ f_\xi &= a_1\xi_1 + a_2\xi_2 + a_3\xi_3 + a_4\xi_4, \\ f_\zeta &= a_5\rho \sin \nu + a_6\rho \cos \nu. \end{aligned}\right\} \quad (10.9.4)$$

Ici $a_1, \ldots, a_6$ sont de nouvelles constantes arbitraires, tandis que $\xi_1, \ldots, \xi_4$ sont définis par les formules (10.8.25).

Portant (10.9.4) dans (10.8.23), (10.8.25) et (10.8.13), on obtient la solution complète en quadratures du problème du vol optimal (10.6.3)-(10.6.4). Pareilles formules ont servi à faire toute une série de calculs pour les trajectoires des vols en direction de Mars, de Vénus et de Jupiter [10.1-10.3]. Nous examinerons certains résultats de ces calculs dans les pages qui suivent.

10. Résultats des calculs des trajectoires interplanétaires optimales

La valeur d'un problème résolu de mécanique du vol spatial est souvent d'autant plus grande que la solution peut plus simplement être « mise en nombres ». La « mise en nombres » est souvent difficile. Par exemple, dans la méthode de calcul décrite, le minimum du travail de calcul se réduit à :

— déterminer les positions et les vitesses des planètes aux instants de départ t_0 et d'arrivée t_1 ;

— calculer la trajectoire de transport ;

— calculer les conditions aux limites en coordonnées de transport x, y, z mobiles en translation et convertir ces conditions aux limites en coordonnées de transport tournantes η, ξ, ζ ;

— calculer les quadratures intervenant dans la solution du problème (10.8.13), (10.8.23), (10.8.25) ;

— résoudre le problème aux limites suivant le schéma du n° 7 et calculer la trajectoire et la commande en coordonnées de transport η, ξ, ζ ;

— convertir ces valeurs en coordonnées x, y, z.

Pour évaluer la précision de la méthode des trajectoires de transport, en certains cas, on doit calculer (d'après un algorithme encore plus compliqué !) la trajectoire qui correspond aux équations exactes (10.5.1) et la comparer avec la trajectoire approchée. Toute cette « cuisine » est restée en marge de notre exposé, car elle s'inscrit mal dans le plan du livre, est étrangère à son style. L'auteur tient cependant à avertir ici ses lecteurs étudiants que tout travail sérieux en mécanique du vol spatial est très souvent indissociable aujourd'hui

de cette « cuisine », équipée bien sûr d'ordinateurs perfectionnés.

Laissons donc de côté la « cuisine » des calculs et passons directement aux résultats.

On voit sur les figures 10.5 à 10.8 quelques caractéristiques du voyage vers Mars. On y distingue aussi bien les caractéristiques exactes que des caractéristiques approchées, ce qui permet de se faire une idée de la précision de la méthode des trajectoires de transport. La variation de l'accélération de poussée en grandeur et en direction

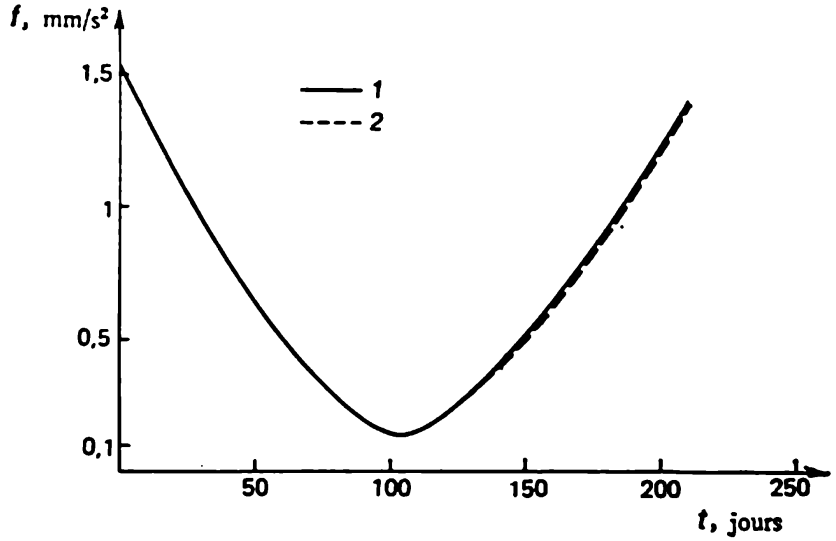


Fig. 10.5. Variation de l'accélération de poussée (en grandeur) dans le temps: *1*, calcul exact; *2*, calcul approché

est illustrée sur les figures 10.5, 10.6. Les trajectoires du vol en direction de Mars (exacte, approchée et de transport) sont montrées sur la figure 10.7. Le vol dure 212 jours. Enfin, la figure 10.8 représente la trajectoire du vol (calculée d'après les formules approchées) en coordonnées de transport. On voit que l'écart maximal par rapport à l'origine des coordonnées est de sept millions de kilomètres, tandis que la trajectoire proprement dite compte quelques centaines de millions de kilomètres. Les figures montrent clairement à quel point l'accélération de poussée requise est faible: elle ne dépasse jamais 1,5 mm/s².

Une caractéristique importante du vol est sa distance angulaire Φ, c'est-à-dire l'angle balayé par le rayon vecteur de l'engin spatial de l'origine des coordonnées à la fin du vol. Pour l'exemple considéré sur les figures 10.5 à 10.8, on a $\Phi \sim 150°$. C'est pour de telles distances angulaires modestes que la méthode des trajectoires de transport convient le mieux. En effet, la trajectoire réelle du vol ne diffère pas trop dans ce cas d'un arc d'une ellipse convenablement choisie. Par contre, si la distance angulaire est grande (360°, 720°, etc.), la trajectoire réelle épousant par exemple le profil d'une portion de spirale entre les orbites de départ et d'arrivée, on ne

trouve aucune trajectoire képlérienne suffisamment proche de la trajectoire vraie du vol à faible poussée, si bien que la méthode tombe en défaut.

Remarquons cependant que les vols les plus intéressants pour la pratique se caractérisent justement par une distance angulaire assez petite, car la durée du vol reste alors raisonnablement courte. L'intérêt de la méthode de la trajectoire de transport réside donc dans la possibilité de calculer vite et avec une bonne précision une multitude de trajectoires utiles. La figure 10.9 donne une idée de l'erreur que l'on commet sur l'intégrale I, caractéristique fondamentale du vol, en appliquant la méthode de la trajectoire de transport. Cette figure montre la variation du rapport $\Delta I/I$ (en pour cent) en fonction de Φ. Ici I est la valeur exacte de l'intégrale et ΔI l'erreur de son calcul par la méthode des trajectoires de transport. Si la distance angulaire du vol est de 225 à 235°, l'erreur est petite (de 1 à 5 %); au contraire, l'erreur croît brusquement quand Φ devient supérieur à 235°. Pour $\Phi \sim 180°$ l'erreur est négligeable: quelques dixièmes, voire quelques centièmes de pour cent. Les vols à très faible distance angulaire ($\Phi < 50°$) n'offrent qu'un intérêt relatif, car ils demandent une accélération de poussée très forte.

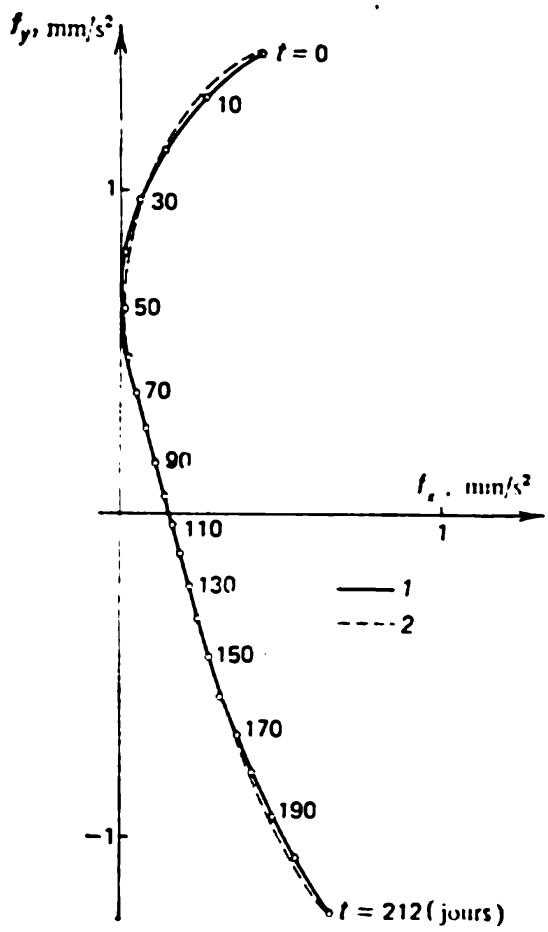


Fig. 10.6. Variation de l'accélération de poussée en grandeur et en direction: *1*, calcul exact; *2*, calcul approché

Certaines caractéristiques des vols vers les planètes Mars et Vénus, calculées selon la méthode approchée décrite, sont citées dans le tableau 10.1 et comparées aux valeurs exactes. Dans ce tableau T est la durée totale du vol, Φ la distance angulaire de la phase de vol séparant les sphères d'influence des planètes, f_f et f_0 les valeurs finale et initiale du module de l'accélération de poussée. Dans la dernière colonne figure le rapport de la différence des valeurs approchées I_{ap} et exacte I_{ex} à I_{ex} en pour cent. Dans les colonnes I, f_f, f_0 sont marquées les valeurs approchées (chiffre de haut) et exactes (chiffre de bas) des grandeurs.

Tableau 10.1

Quelques caractéristiques des vols en direction de Mars et de Vénus

	Dates de départ et d'arrivée	I, m²/s³	T, j	Φ	f_f, mm/s²	f_0, mm/s²	$\frac{I_{ap} - I_{ex}}{I_{ex}}$ 100%
Vers Mars	28.IX.1960 28.IV.1961	11,53 11,54	212	147°,38	1,44 1,43	1,51 1,52	0,09
	15.XI.1964 11.X.1965	3,23 3,20	330	222°,65	0,405 0,42	0,89 0,88	0,94
Vers Vénus	22.III.1964 21.VII.1964	26,44 26,43	121	136°,35	4,02 4,08	1,85 1,845	0,04
	11.XII.1963 18.VII.1964	11,975 11,385	220	234°,79	2,25 2,24	1,26 1,15	5,18

Remarquons maintenant que la commande optimale est, comme on le voit, très difficile à réaliser. On est obligé de faire varier notablement l'accélération de poussée en grandeur et en direction. Cela

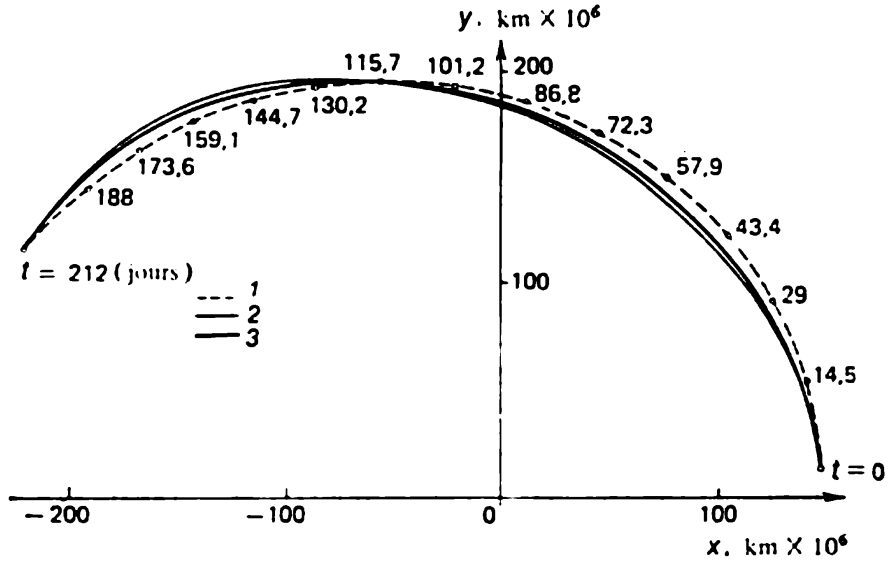


Fig. 10.7. Trajectoires du vol en direction de Mars: *1*, ellipse de transport; *2*, trajectoire approchée; *3*, trajectoire exacte

contredit la condition méthodologique majeure selon laquelle la conduite de l'engin doit être aussi simple que possible. Autant on gagne en masse de la charge utile transportée, autant on perd en simplicité et, par conséquent, en sécurité du vol. Une question se pose tout naturellement : peut-on remplacer la commande optimale

Tableau 10.2

$f \neq g$

T, jours	Φ, deg	Problème approché					Problème exact					$\frac{\lvert I_{ap}-I_{ex}\rvert}{I_{ex}}100\%$
		I, m²/s³	f, mm/s²	g, mm/s²	$\frac{\tau/T}{\tau}$, jours	$\frac{\Delta\tau/T}{\Delta\tau}$, jours	I, m²/s³	f, mm/s²	g, mm/s²	$\frac{\tau/T}{\tau}$, jours	$\frac{\Delta\tau/T}{\Delta\tau}$, jours	
150	128	93,77	2,446	3,943	$\frac{0,311}{47}$	$\frac{0,343}{52}$	93,00	2,451	3,896	$\frac{0,311}{47}$	$\frac{0,339}{51}$	0,83
250	176	8,690	0,784	0,849	$\frac{0,271}{68}$	$\frac{0,402}{101}$	8,639	0,792	0,837	$\frac{0,267}{67}$	$\frac{0,402}{100}$	0,57
350	232	4,251	0,694	0,255	$\frac{0,228}{80}$	$\frac{0,302}{106}$	4,151	0,695	0,263	$\frac{0,218}{76}$	$\frac{0,318}{111}$	2,41
400	263	4,623	0,612	0,238	$\frac{0,276}{110}$	$\frac{0,192}{77}$	3,870	0,644	0,198	$\frac{0,213}{85}$	$\frac{0,182}{73}$	19,7
500	326						3,510	0,467	0,181	$\frac{0,261}{130}$	$\frac{0,000}{0}$	
600	381						3,865	0,340	0,218	$\frac{0,391}{235}$	$\frac{0,000}{0}$	
700	428						4,464	0,344	0,211	$\frac{0,398}{279}$	$\frac{0,000}{0}$	

Tableau 10.3

$f = g$

T, jours	Φ, deg	Problème approché				Problème exact				$\frac{\lvert I_{ap} - I_{ex} \rvert}{I_{ex}} 100\%$
		I, m²/s³	f, mm/s²	$\frac{\tau/T}{\tau}$, jours	$\frac{\Delta\tau/T}{\Delta\tau}$, jours	I, m²/s³	f, mm/s²	$\frac{\tau/T}{\tau}$, jours	$\frac{\Delta\tau/T}{\Delta\tau}$, jours	
150	128	98,173	3,493	$\frac{0,225}{34}$	$\frac{0,379}{57}$	97,098	3,456	$\frac{0,228}{34}$	$\frac{0,372}{56}$	1,11
250	176	8,710	0,824	$\frac{0,250}{63}$	$\frac{0,406}{102}$	8,649	0,819	$\frac{0,253}{63}$	$\frac{0,403}{101}$	0,70
350	232	5,070	0,520	$\frac{0,362}{127}$	$\frac{0,379}{133}$	5,027	0,518	$\frac{0,361}{126}$	$\frac{0,381}{133}$	0,85
400	263	5,442	0,461	$\frac{0,390}{156}$	$\frac{0,278}{111}$	4,909	0,441	$\frac{0,399}{160}$	$\frac{0,268}{107}$	10,9
500	326					4,570	0,342	$\frac{0,451}{225}$	$\frac{0,095}{48}$	
600	381					4,325	0,306	$\frac{0,476}{286}$	$\frac{0,025}{15}$	
700	428					7,287	0,419	$\frac{0,331}{232}$	$\frac{0,312}{219}$	

par une commande plus facile à exécuter? Supposons par exemple qu'au commencement du vol l'accélération de poussée soit constante en grandeur et en direction, qu'en seconde phase (passive) les moteurs soient simplement arrêtés et qu'en phase finale l'accélération de poussée soit de nouveau constante en grandeur et en direction. Peut-on espérer qu'une telle commande «étagée» pourra être plus ou moins proche de la commande optimale?

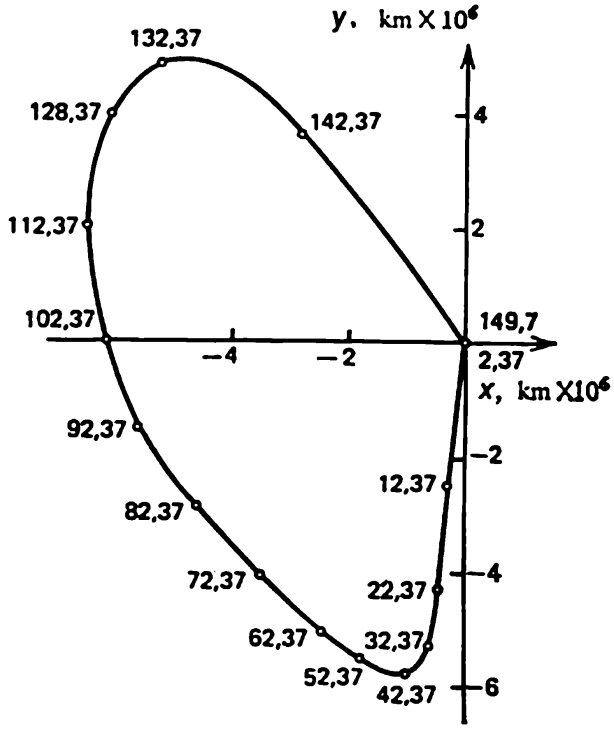


Fig. 10.8. Représentation de la trajectoire en coordonnées de transport. Les chiffres jalonnant la trajectoire sont les valeurs de l'anomalie vraie sur l'ellipse de transport

V. Goloubkov a examiné dans [10.3] deux lois de commande étagées élémentaires.

Soit

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}, & 0 \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, & \tau \leqslant t \leqslant \tau + \Delta\tau, \\ \mathbf{g}, & \tau + \Delta\tau \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{10.10.1}$$

V. Goloubkov a considéré deux cas de réalisation de la loi (10.10.1), d'abord pour $f = g$ et ensuite pour $f \neq g$. Ici $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ sont les accélérations de poussée en première et en troisième phases du vol respectivement (ce sont des constantes vectorielles), t l'instant considéré, T le temps de vol, τ la durée de fonctionnement du propulseur en première phase du vol, $\Delta\tau$ la durée de la phase passive du vol, $f = |\mathbf{f}|$, $g = |\mathbf{g}|$. Ainsi donc, la trajectoire se compose en général de deux phases propulsives et d'une phase passive. Les paramètres de la loi de commande sont utilisés pour satisfaire aux conditions aux limites et à la condition du minimum de I.

Le calcul numérique des vols Terre-Mars a été effectué pour une date de départ fixée, d'abord par la méthode des trajectoires de transport, puis exactement (intégration numérique des équations du mouvement). Certains résultats du calcul figurent dans les tableaux 10.2 et 10.3.

En regardant ces tableaux, on remarque que la commande étagée est calculée avec la même précision que la commande optimale (fig. 10.9). On a donc le droit de faire la comparaison des valeurs de I

en commande étagée et optimale lors du calcul approché des trajectoires correspondantes.

Cette comparaison permet de voir ce qu'on perd en remplaçant la commande optimale par la commande étagée. Les données correspondantes pour les vols Terre-Mars sont citées dans le tableau 10.4, où $I_{opt}^{(1)}$ est la valeur de l'intégrale I pour la commande optimale en première approximation, I_1 la valeur de I pour la commande étagée en première approximation, T le temps de vol, Φ la distance angulaire.

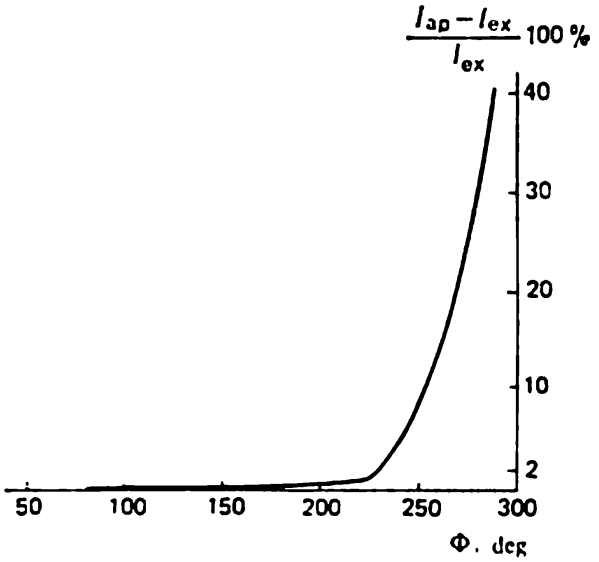


Fig. 10.9. Variation de l'erreur de calcul approché de I en fonction de la distance angulaire Φ du vol en direction de Mars et de Vénus

On remarque que du point de vue énergétique (au sens de I) la loi de commande optimale diffère notablement de la loi étagée. Cette différence varie avec le temps. Pour un temps de vol de 150 jours le gain en énergie de la commande optimale en comparaison avec la commande étagée est de 9,2 % si $f \neq g$ et de 15,5 % si $f = g$. Pour un temps de vol de 350 jours, le gain est de 39,4 % et de 51,5 % respectivement. La commande étagée est sensiblement plus avantageuse pour $f \neq g$ que pour $f = g$.

L'analyse du calcul exact des vols Terre-Mars en commande étagée (voir les tableaux 10.2, 10.3) montre que I passe par un minimum

Tableau 10.4

Loi optimale			$f = g$		$f \neq g$	
Φ, deg	T, j	$I_{opt}^{(1)}$, m²/s²	I_1, m²/s³	$\frac{\lvert I_1 - I_{opt}^{(1)} \rvert}{I_1} 100\%$	I_1, m²/s³	$\frac{\lvert I_1 - I_{opt}^{(1)} \rvert}{I_1} 100\%$
128	150	85,0	98,2	15,5	93,8	9,2
152	200	21,4	25,4	18,7	24,1	12,6
176	250	7,5	8,71	16,1	8,69	15,9
203	300	4,2	5,4	28,6	5,0	19,0
232	350	3,3	5,0	51,5	4,3	39,4

en T pour une date de départ fixée. Ce minimum présente un certain palier, ce qui permet de varier le temps de vol dans des limites assez larges (de l'ordre de 200 jours) sans que I change excessivement (la « fenêtre de tir »). On remarque en outre, en analysant les tableaux 10.2 et 10.3, que ce minimum est atteint pour un temps de vol suffisamment prolongé (530 j pour $f = g$ et 500 j pour $f \neq g$).

Notons en outre que pour $f = g$ le minimum de I peut être atteint sur des trajectoires sans phase passive (tableau 10.3).

Il en est tout autrement pour une trajectoire optimale. Le calcul exact montre qu'en trajectoire optimale le minimum de I ne peut être atteint pour aucun T. Plus T est grand, moins I est élevé (et plus est grand le nombre des révolutions qu'on sera obligé de faire autour du Soleil suivant la spirale). Pour $T \to \infty$ on a $I \to 0$. Comme quoi on pourrait économiser très sensiblement sur le combustible si la vie humaine n'était pas si courte.

En terminant ce n°, indiquons que la méthode approchée de la trajectoire de transport permet de réduire la durée des calculs dans un rapport de sept à dix en moyenne en comparaison avec le calcul exact. C'est un avantage indéniable lorsqu'il s'agit de calculer des séries répétitives de trajectoires.

11. Représentation des résultats du calcul des trajectoires par séries

Quand on a beaucoup de trajectoires à calculer, il y a intérêt à donner aux résultats du calcul une forme graphique suffisamment claire, afin de faciliter le choix des trajectoires à caractéristiques requises.

Comme paramètres fondamentaux prenons les instants initial t_1 et final t_2 de la phase de vol entre les sphères d'influence des planètes. On demande toujours qu'à l'instant de sortie de la sphère d'influence la vitesse de l'engin par rapport à la planète soit nulle.

Pour représenter les résultats des calculs, prenons le plan t_1, t_2 [10.2, 10.3]. Il est commode de tracer dans ce plan différentes familles de courbes d'égales caractéristiques (fig. 10.10), par exemple les courbes d'égales accélérations de poussée ou d'égales consommations de propergol. A chaque voyage « aller » correspond un point (t_1, t_2) du plan. Ce point est situé au-dessus de la bissectrice du premier quadrant puisque $t_2 > t_1$. La valeur de l'accélération de poussée nécessaire pour le vol donné (ou la valeur de I) est représentée par la courbe qui passe par le point.

La bissectrice correspond aux vols à vitesse infiniment grande. En marquant pour les voyages « retour » l'instant de commencement du vol t_1' en ordonnées et l'instant de fin du vol t_2' en abscisses dans le même plan, on obtient pour les voyages « retour » des points situés au-dessous de la bissectrice, car $t_2' > t_1'$.

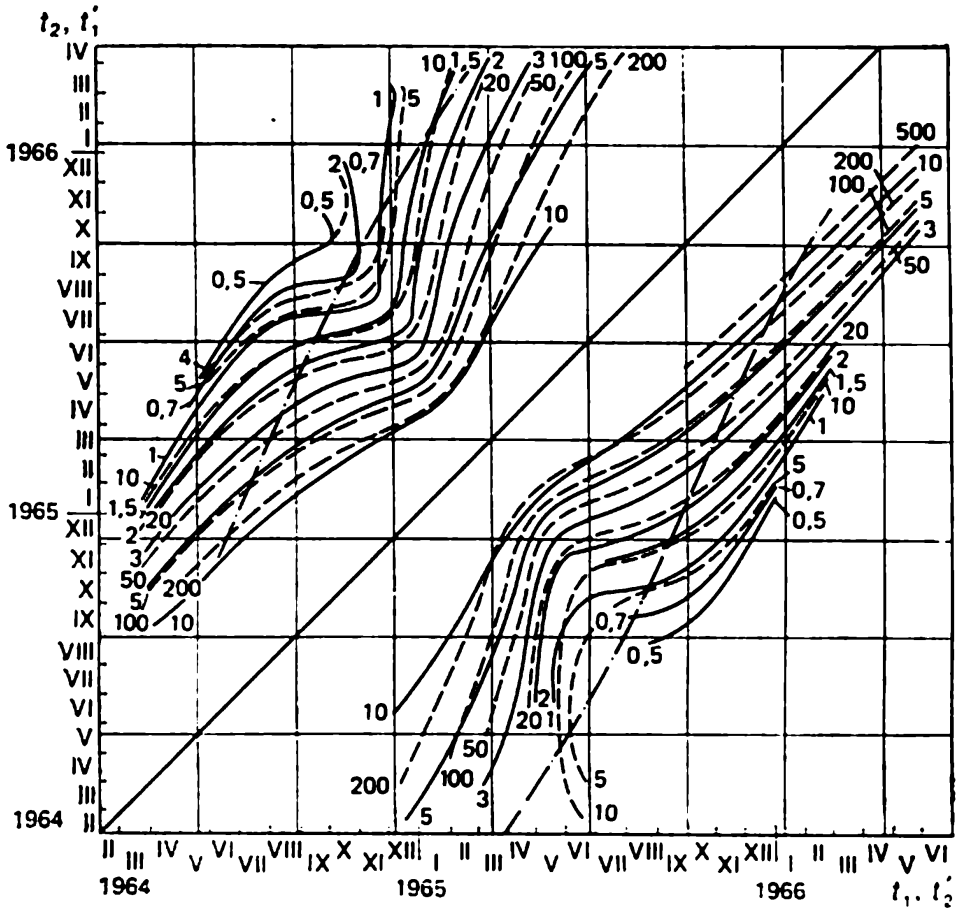


Fig. 10.10. Courbes d'égales caractéristiques du vol vers Mars. En trait plein, courbes des accélérations maximales égales (en mm/s²) ; en trait interrompu, courbes des valeurs égales de I (en m²/s³)

Pour qu'un couple de points (t_1, t_2), (t_1', t_2') puisse représenter un vol aller et retour, il faut qu'il y ait $t_1' \geqslant t_2'$, la différence $t_1' - t_2$ indiquant la durée de séjour près de la planète d'arrivée. La différence $T_\Sigma = t_2' - t_1$ représente évidemment la durée totale de la mission.

Représentons les résultats du calcul de l'intégrale I dans le plan t_1, t_2 sous la forme des courbes de I = Cte. Proposons-nous en plus de construire les courbes d'égales valeurs maximales de l'accélération de poussée.

En analysant les courbes tracées dans le plan t_1, t_2, on arrive à cerner l'ensemble des trajectoires des voyages vers des planètes, ainsi que des trajectoires qui prévoient le retour à la Terre.

A titre d'exemple, nous avons tracé sur la figure 10.10 les courbes de f_{max} = Cte et de I = Cte pour les voyages vers Mars en 1964-1966 (les dates ne doivent pas nous étonner : il ne s'agit que d'un exemple). Dans les travaux [10.2, 10.3] des courbes analogues ont été tracées dans le plan t_1, t_2 pour les voyages vers Vénus et vers Jupiter.

Nous donnons ci-après quelques tableaux qui résument les caractéristiques des trajectoires les plus intéressantes des voyages qui auraient pu être effectués en 1964-1965. Ces caractéristiques ont été dégagées justement de l'analyse des courbes de I = Cte, f_{max} = Cte dans le plan t_1, t_2. Les tableaux 10.5, 10.6 et 10.7 contiennent les caractéristiques des vols en direction de Mars, de Vénus et de Jupiter respectivement, toujours avec retour à la Terre. La première colonne

Tableau 10.5

Quelques caractéristiques du voyage aller-retour le plus bref en direction de Mars

I	II	III	IV	V
f_{max}, mm/s²	$t_{dép}$	T_Σ, j	$I_{a/r}$, m²/s³	I_Σ, m²/s³
1	20.XI.1964	564	13,5	18,7
2	20.XII.1964	470	37	47,4
5	3.I.1965	330	170	196
10	6.II.1965	236	500	550

indique la valeur de l'accélération de poussée maximale f_{max} pour le vol donné; la deuxième, la date du départ $t_{dép}$; la troisième, la durée totale du vol T_Σ (en jours), compte tenu du temps nécessaire au freinage dans la sphère d'influence de la planète (jusqu'à une orbite circulaire d'altitude h = 300 km pour Mars et Vénus et d'altitude

Tableau 10.6

Quelques caractéristiques du voyage aller-retour le plus bref en direction de Vénus

I	II	III	IV	V
f_{max}, mm/s²	$t_{dép}$	T_Σ, j	$I_{a/r}$, m²/s³	I_Σ, m²/s³
3	4.V.1964	490	45	84
5	1.IX.1964	340	125	185
10	9.I.1965	200	350	454

égale à la hauteur d'Amalthée, cinquième satellite de Jupiter, pour Jupiter) et à la mise en vitesse pour le retour; la quatrième colonne contient la valeur de l'intégrale $I = I_{a/r}$ nécessaire au vol entre les sphères d'influence des planètes, aller et retour, et la cinquième, la valeur totale de l'intégrale $I = I_\Sigma$ nécessaire au vol, compte tenu de

Tableau 10.7

Quelques caractéristiques du voyage aller-retour en direction de Jupiter

I	II	III	IV	V
f_{max}, mm/s²	$t_{dép}$	T_{Σ}, j	$I_{a/r}$, m²/s³	I_{Σ}, m²/s³
2	2.VII.1965	1090	85	178
3	21.VIII.1965	1000	135	275
5	10.X.1965	890	320	562

l'énergie nécessaire au freinage et à la remise en vitesse pour le retour. On calcule sans peine cette énergie d'après les caractéristiques connues du freinage et de la mise en vitesse (voir par exemple le septième essai de notre livre).

En regardant les tableaux 10.5-10.7, on voit qu'avec une accélération maximale de 2 à 3 mm/s², le voyage aller-retour vers Mars et vers Vénus dure à peu près dix-huit mois et vers Jupiter, dans les trois ans. Une mission de dix-huit mois vers Mars est envisageable même avec $f_{max} = 1$ mm/s².

Les trajectoires optimales présentent une particularité intéressante : les courbes de I et de f_{max} dans le plan t_1, t_2 accusent un minimum aigu pour une certaine date de départ, la durée du vol étant fixée. En effet, le lieu géométrique des points des durées de vol égales T_0 est une droite parallèle à la bissectrice du premier quadrant dans le plan t_1, t_2. Cette droite coupe certaines courbes d'égales caractéristiques en deux points, ce qui veut dire que le voyage de durée T_0 donnée est possible (avec la valeur donnée de I) avec deux dates de départ. Une seule courbe $I = I_0$ est tangente à la droite $t_2 - t_1 = T_0$; elle correspond précisément à la plus petite valeur de I pour le vol de durée T_0 et la date de départ correspondante est optimale. Les dates de départ optimales sont groupées entre octobre 1964 et janvier 1965, ce qui est clairement visible sur la figure 10.10.

Pour $I < I_0$ le vol de durée T_0 est impossible (les courbes correspondantes ne rencontrent pas la droite $t_2 - t_1 = T_0$). La variation de l'intégrale I en fonction de la date de départ pour la durée donnée du voyage Terre-Mars, représentée sur la figure 10.11, est tirée de l'ouvrage [10.7] des chercheurs américains W. G. Melbourne et C. G. Sauer qui ont résolu le problème aux limites pour les équations exactes (10.5.1) du mouvement optimal par des méthodes numériques. La figure 10.11 est extrêmement intéressante, car elle donne des « fenêtres de tir » possibles largement échelonnées (sur quatre ans) et révèle deux familles de trajectoires pour ce délai de quatre ans.

On voit par exemple que les dates de départ optimales ont lieu en janvier-avril 1969 et en mars-juillet 1971.

Les points d'intersection (aux environs de septembre-octobre 1970) des courbes des deux familles qu'on voit sur la figure 10.11 correspondent à des trajectoires curieuses qui définissent une solution non unique du problème aux limites. En effet, tous les paramètres sont les mêmes en ces points : la date de départ, la durée du

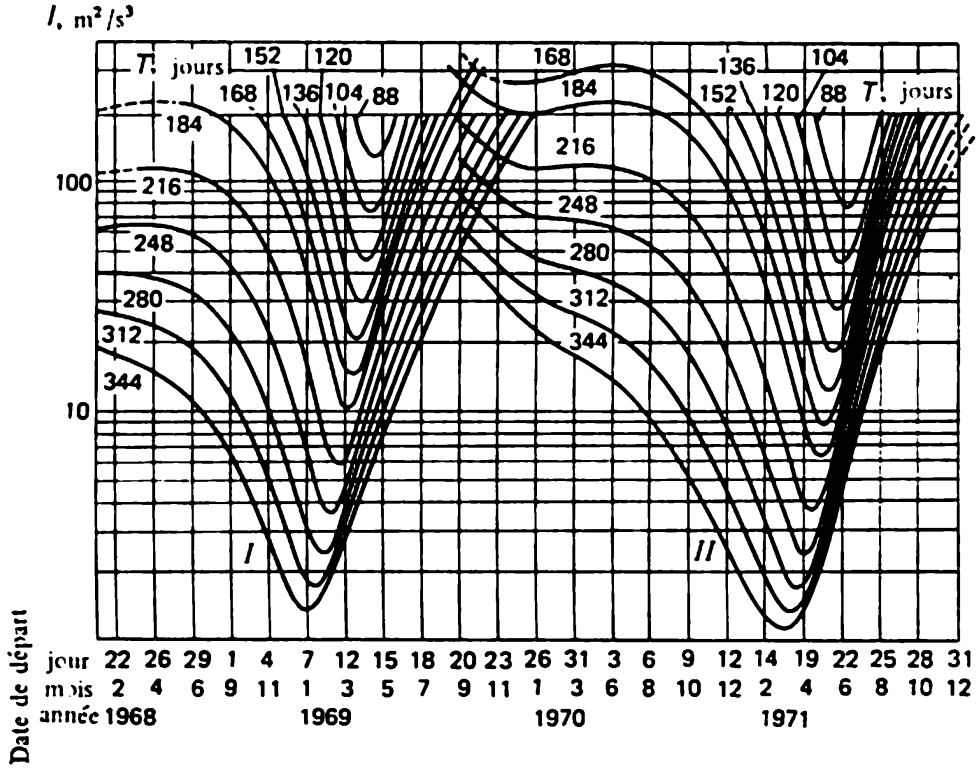


Fig. 10.11. Variation de I en fonction de la date de départ et de la durée du vol (mission Terre-Mars)

vol (donc aussi les valeurs initiales et finales des coordonnées et des vitesses), la valeur de l'intégrale I... Seules diffèrent les commandes, ce qui veut dire que des trajectoires différentes sont possibles. Une telle solution non unique du problème aux limites est illustrée à titre d'exemple sur la figure 10.12. La durée du vol est de cinq mois dans les deux cas, mais la première trajectoire fait une boucle entourant le Soleil (distance angulaire $\Phi = \Phi_0 + 360° > 360°$) et la seconde non (la distance angulaire Φ_0 est faible, inférieure à 90°).

Les cas où le problème aux limites admet une solution non unique reviennent périodiquement, tous les 2 ans et 3 mois à peu près. Les dates de départ optimales se suivent avec la même périodicité. N'importe quel voyage en direction de Mars est caractérisé par la même période, et pas seulement les vols à faible poussée : un tel délai, de 2 ans et 34 jours à 2 ans et 80 jours, sépare les instants où

la Terre et Mars occupent les mêmes positions par rapport au Soleil...

Connaissant la valeur de l'intégrale I nécessaire à un vol donné, on peut calculer à l'aide de la formule (10.25) le rapport de la masse finale à la masse initiale. A cet effet, on se donne une masse initiale

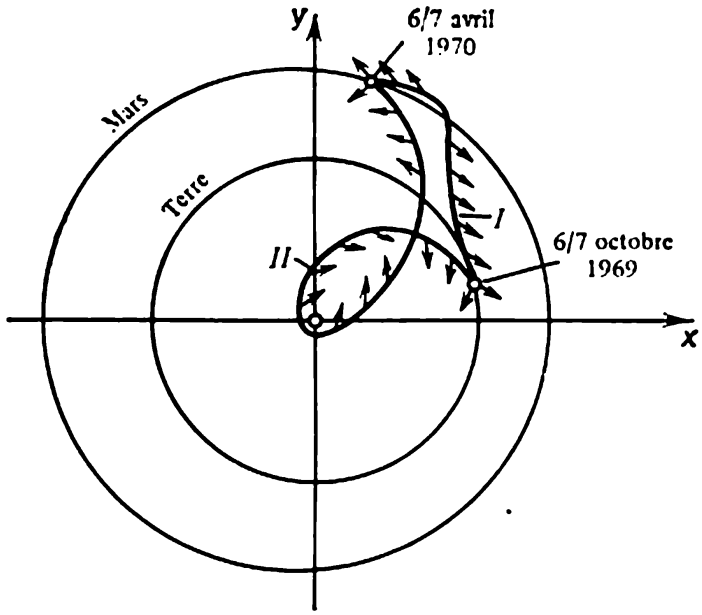


Fig. 10.12. Deux trajectoires différentes Terre-Mars ayant la même date de départ et d'arrivée et la même consommation de propergol

m_0 et une puissance N du propulseur. La puissance du propulseur est limitée et dépend de son poids, lequel intervient à son tour dans m_0 : on comprend que l'analyse des charges à emporter représente un problème à part. Il est traité dans le livre déjà cité [10.4] de G. Grodzovski, Iou. Ivanov et V. Tokarev.

12. Les corrections des trajectoires interplanétaires

Nous avons été témoins de toute une série de vols de stations automatiques en direction de Vénus, de Mars et d'autres planètes. Les trajectoires de ces vols étaient proches des képlériennes, car elles étaient réalisées par inertie, les propulseurs à l'arrêt. Or, au moment du lancement, on commet inévitablement des erreurs en «injectant» la station, ce qui fait que des perturbations mal connues peuvent s'accumuler au cours du voyage. En résultat la station interplanétaire parcourt le plus souvent une trajectoire légèrement différente de celle qui était prévue ; une *correction* s'impose donc, sinon l'engin risque de manquer son point d'arrivée. La correction s'opère en faisant fonctionner le moteur-fusée pendant une durée strictement limitée. Une foule de questions se posent alors : à quel moment faut-il mettre à feu le moteur ? pour combien de

temps? une seule fois ou plusieurs? où diriger la poussée? Et la question essentielle: comment réaliser la correction au prix de la plus petite dépense de propergol? On sait que la station n'emporte que très peu de propergol; il est donc important d'en user à bon escient.

Il ne faut pas oublier en outre que les réponses aux questions posées dépendent de la trajectoire réellement suivie dont les paramètres sont mesurés imparfaitement et ne sont donc jamais connus avec précision. D'autre part, on n'arrive jamais à mettre à feu le moteur à un instant précis. On comprend donc que la théorie des corrections des trajectoires interplanétaires est assez compliquée. Elle s'est construite et continue à se développer, grâce aux contributions de nombreux chercheurs.

Nous nous bornerons à décrire ici un problème de correction simplifié, considéré sous une forme plus générale par A. Platonov dans son travail [10.8].

Il est logique de décrire le mouvement suivant la trajectoire réelle en termes d'écart de la trajectoire nominale, au moyen de l'équation vectorielle linéarisée du mouvement que nous avons déjà étudiée (10.6.3). Nous simplifierons encore plus cette équation en négligeant les perturbations gravitionnelles de la trajectoire, c'est-à-dire le terme $A_0\rho$. L'expérience montre qu'on peut le faire sans risquer de fausser exagérément les résultats des calculs: en revanche, cela permet de mettre en relief les particularités qualitatives de la manœuvre correctrice. Les équations en question deviennent donc

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{f}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{V}. \tag{10.12.1}$$

Quant au problème de correction, il se pose ainsi: on demande qu'à l'instant final du vol $t = T$ les coordonnées $\mathbf{r}$ et les vitesses $\mathbf{V}$ prennent des valeurs nominales, respectivement $\mathbf{r}_f$ et $\mathbf{V}_f$ et que la commande du vecteur $\mathbf{f}$ garantisse le minimum de la fonctionnelle S (10.2.3).

Admettons que $\mathbf{f}$ soit borné en module,

$$-a \leqslant |\mathbf{f}| \leqslant +a. \tag{10.12.2}$$

Ecrivons la fonction de Pontriaguine pour le cas considéré:

$$\mathscr{H} = -|\mathbf{f}| + \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{f} + \boldsymbol{\psi}_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{V}, \tag{10.12.3}$$

ainsi que les équations du système associé de variables $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}$, $\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{r}}$:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{r}} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\psi}}_{\mathbf{V}} = -\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{r}}. \tag{10.12.4}$$

Pour que la loi de commande soit optimale, il faut que la fonction $\mathscr{H}$ passe par le maximum suivant la commande de $\mathbf{f}$. Cela a lieu quand

$$\left.\begin{array}{lll} |\mathbf{f}| = 0 & \text{si} & |\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}| < 1, \\ |\mathbf{f}| = a, \ \mathbf{f} = \alpha\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}} & \text{si} & |\boldsymbol{\psi}_{\mathbf{V}}| > 1. \end{array}\right\} \tag{10.12.5}$$

Les formules (10.12.5), dans lesquelles α est une quantité scalaire constante arbitraire, définissent la loi de la correction optimale. Le moteur ne sera mis à feu que pour $|\boldsymbol{\psi}_V(t)| > 1$, le module de l'accélération de poussée étant maximal et sa direction confondue avec celle du vecteur $\boldsymbol{\psi}_V$. Remarquons que les équations (10.12.4) se laissent facilement intégrer et donnent une dépendance explicite

$$\boldsymbol{\psi}_V(t) = -\boldsymbol{\psi}_r^0 t + \boldsymbol{\psi}_V^0, \tag{10.12.6}$$

d'où

$$|\boldsymbol{\psi}_V(t)| = \sqrt{m^2t^2 + 2nt + k^2}, \tag{10.12.7}$$

$$m^2 = |\boldsymbol{\psi}_r^0|^2, \quad n = -\boldsymbol{\psi}_r^0 \cdot \boldsymbol{\psi}_V^0, \quad k^2 = |\boldsymbol{\psi}_V^0|^2.$$

La nature de la dépendance (10.12.7) montre aussitôt que la valeur de $|\boldsymbol{\psi}_V(t)|$ dans un intervalle temporel fermé $[t_0, T]$ peut devenir supérieure à l'unité ($|\boldsymbol{\psi}_V| > 1$) en deux phases tout au plus, dont la première se situe au commencement et la seconde en fin du vol. Nous pouvons en tirer une conclusion curieuse : le problème ainsi posé, *il y a tout au plus deux phases actives de correction optimale, dont la première commence à l'instant initial t_0 et la seconde se termine à l'instant final T du vol.*

Dans les conditions favorables une de ces phases peut disparaître, et quand les conditions sont défavorables (la trajectoire présente des écarts importants dès le début), les deux phases se réunissent, et l'on se voit obligé de laisser le propulseur en marche pendant toute la durée du vol.

Remarquons en outre qu'en vertu de (10.12.5) et (10.12.6) les composantes de l'accélération de poussée fournie par le propulseur en cas de commande optimale présentent une variation linéaire dans le temps. Pour définir la loi concrète de la commande de l'accélération de poussée, on doit exprimer les vecteurs $\boldsymbol{\psi}_r^0$, $\boldsymbol{\psi}_V^0$ en fonction des conditions aux limites $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_f$, $\mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_f$ du problème posé.

On trouve dans [10.9] une liste des travaux consacrés aux problèmes de correction des trajectoires.

ONZIÈME ESSAI

MOUVEMENT RELATIF DES CORPS EN ORBITE

Il était mort, oui ! Mais il ne pouvait tomber,
Entré dans les circuits du mouvement planétaire.
Une gueule béante le guettait en bas,
Mais les forces d'attraction étaient trop faibles.
Le firmament était percé de rayons,
De rayons divinement froids.
Incorruptible il volait en avant,
Regardait les étoiles de ses yeux morts.

N. Goumiliov
L'aigle

1. Deux satellites sont en orbite

Chacun se déplace par rapport à la Terre. Ce déplacement est connu. Mais comment les satellites se déplacent-ils l'un par rapport à l'autre ? Il faut absolument connaître ce mouvement, par exemple, dans le problème du rendez-vous spatial de deux objects.

Deux satellites sont reliés par un câble. De quelle façon leur mouvement relatif en est-il affecté ?

Le cosmonaute s'est séparé de son vaisseau. Il est attaché au vaisseau par un câble ou un filin. Ce filin n'est pas du tout superflu : en vertu des lois de la mécanique céleste, le cosmonaute restera inévitablement en arrière de la station orbitale ou la dépassera, avec les mêmes conséquences (voir l'épigraphe). Mais comment se déplacera-t-il par rapport à la station au bout d'un filin ?

Toutes ces questions (et beaucoup d'autres semblables) font partie de la classe des problèmes sur le mouvement relatif des objets spatiaux, tels que les satellites, les cosmonautes, les sections de stations orbitales, reliés l'un à l'autre par un lien non rigide.

Nous commencerons notre analyse du mouvement relatif par le cas du mouvement libre de deux points matériels l'un par rapport à l'autre. On peut supposer, par exemple, que l'un des points soit la station orbitale et l'autre le cosmonaute. Tant que le filin reliant le cosmonaute à la station n'est pas tendu à l'extrême, on peut admettre que le cosmonaute se déplace librement. Une fois le filin tendu, la station commence à éprouver la réaction de liaison. Une force de même intensité mais de sens inverse s'applique au cosmonaute.

Considérons d'abord le mouvement orbital de deux points matériels reliés par un fil avant de passer à leur mouvement libre. Le mouvement d'un système de deux points matériels reliés par un fil flexible inextensible sans masse, appelé *grappe de deux corps*, a été analysé dans les travaux [11.1, 11.2] de V. Béletski et E. Novikova.

Soient, d'après [11.1], m_α, m les masses des points matériels et $\mathbf{r}_\alpha$, $\mathbf{r}$ leurs rayons vecteurs géocentriques. Supposons que les points soient reliés par un fil flexible inextensible sans masse de longueur l (fig. 11.1). Il doit y avoir alors, pendant le mouvement, l'inégalité

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha| \leqslant l, \tag{11.1.1}$$

ou condition de liaison. Autrement dit, la distance entre les points n'est jamais supérieure à la longueur du fil. On peut alors exprimer les équations vectorielles du mouvement sous la forme d'équations de Lagrange de première espèce.

Expliquons la signification de ce terme. Soit un système de n points matériels de coordonnées x_i, y_i, z_i, soumis à des liaisons parfaites unilatérales

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) \leqslant 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{a}$$

Les équations du mouvement

$$\left.\begin{aligned} m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} &= X_\nu + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}, \\ m_\nu \frac{d^2y_\nu}{dt^2} &= Y_\nu + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_\nu}, \\ m_\nu \frac{d^2z_\nu}{dt^2} &= Z_\nu + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_\nu} \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

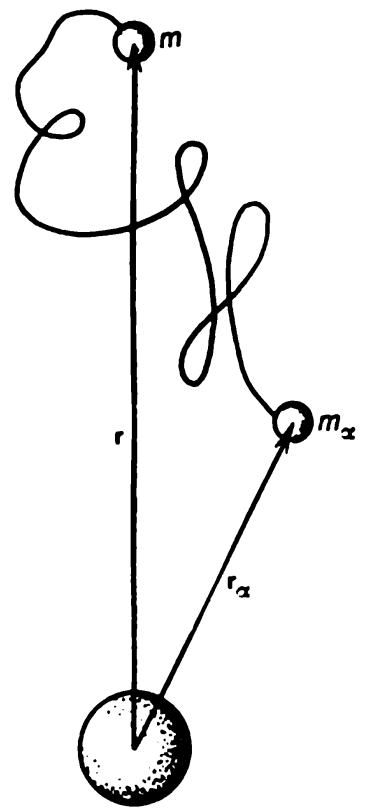


Fig. 11.1. Grappe de deux corps en orbite

s'appellent *équations de Lagrange de première espèce* et définissent le mouvement d'un système de points matériels de masses m_ν dont chacun est soumis à une force de composantes X_ν, Y_ν, Z_ν; de surcroît les points du système sont soumis aux liaisons indiquées. Le multiplicateur de Lagrange λ_j est toujours nul, sauf si la liaison f_j est tendue (égalité stricte), auquel cas on a obligatoirement $\lambda_j < 0$. Si, au contraire, la liaison f_j n'est pas tendue (inégalité stricte), le multiplicateur de Lagrange correspondant est $\lambda_j = 0$. Les $3n$ équa-

tions du mouvement, associées aux m inéquations des conditions du mouvement gêné, définissent $3n + m$ inconnues, à savoir $3n$ coordonnées x_ν, y_ν, z_ν et m multiplicateurs de Lagrange λ_j.

Pour le problème considéré les équations de Lagrange de première espèce s'écrivent sous forme vectorielle

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{m\mu\mathbf{r}}{r^3} &= -2\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha), \\ m_\alpha\ddot{\mathbf{r}}_\alpha + \frac{m_\alpha\mu\mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha^3} &= 2\lambda(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha). \end{aligned}\right\} \qquad (11.1.2)$$

Elles tiennent compte de l'attraction newtonienne de chaque point en direction du centre de la Terre. Les seconds membres des équations représentent la réaction de liaison. Le multiplicateur λ reste à déterminer.

Si le mouvement est libre, on a dans (11.1.1) l'inégalité stricte: on pose alors $\lambda \equiv 0$ dans (11.1.2). Si le mouvement est gêné, on a dans (11.1.1) l'égalité stricte et l'on pose $\lambda \neq 0$ dans (11.1.2).

Nous voulons déterminer le mouvement relatif des points m et m_α. Considérons leur mouvement par rapport à leur centre de masse commun. On doit évidemment connaître le mouvement de ce centre, qui n'est pas képlérien en général. Pour s'en persuader, il suffit de se livrer en pensée à une petite expérience.

Soient deux points matériels libres de même masse qui partent d'un même point de l'espace, l'un suivant une orbite circulaire, l'autre suivant une très proche orbite elliptique tangente à la première. Puisque les périodes de révolution sont très peu différentes, il faut un assez grand nombre de révolutions pour que les points matériels se trouvent à une distance sensiblement égale du centre d'attraction et que l'écart angulaire de leurs rayons vecteurs soit voisin de 180°. A cet instant le centre de masse du système se confondra évidemment à peu près avec le centre d'attraction, alors qu'à l'instant initial il se trouvait au point de contact des orbites. On comprend aisément que le rayon vecteur du centre de masse du système n'a pas seulement beaucoup changé en module mais qu'il a décrit un nombre assez grand de révolutions autour du centre d'attraction. Cela veut dire que dans l'intervalle de temps considéré la trajectoire du centre de masse est spirale (avec bien sûr des modulations locales le long de la spirale). Dans un intervalle de temps infiniment prolongé la trajectoire a la forme d'une spirale pulsante, le module du rayon vecteur du centre de masse tantôt diminuant jusqu'à une valeur très petite, tantôt redevenant presque égal à sa valeur initiale.

Or, dans le problème considéré, l'analyse se trouve grandement simplifiée par la circonstance suivante. Il est logique de supposer que la distance maximale l entre les points est toujours petite devant les distances r, r_α des points au centre d'attraction, si bien que

$l/r \ll 1$, $l/r_\alpha \ll 1$. On peut affirmer alors, sans risque d'erreur notable, que le centre de masse du système parcourt une orbite képlérienne. Montrons-le. A cet effet, désignons le rayon vecteur du centre de masse par $\mathbf{R}$. Il vient

$$\mathbf{R} = \frac{m\mathbf{r} + m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{m + m_\alpha}. \tag{11.1.3}$$

Soit $m + m_\alpha = M$; il vient alors de (11.1.2)

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{R}} + \mu\left(\frac{m\mathbf{r}}{r^3} + \frac{m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{r_\alpha^3}\right) = 0, \\ \mathbf{r} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}, \quad \mathbf{r}_\alpha = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11.1.4}$$

Ici $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\rho}_\alpha$ sont les rayons vecteurs des points m, m_α issus de leur centre de masse commun. Puisque $\rho \leqslant l$ et $\rho_\alpha \leqslant l$, on a $\rho \ll r$ et $\rho_\alpha \ll r_\alpha$, d'où $r \approx r_\alpha \approx R$ et

$$\frac{\rho}{R} \ll 1, \quad \frac{\rho_\alpha}{R} \ll 1. \tag{11.1.5}$$

Développons la parenthèse de (11.1.4) suivant les puissances des petites grandeurs (11.1.5) et gardons dans le développement les seuls termes petits d'ordre inférieur ou égal à 2. Au lieu de (11.1.4), nous obtenons l'équation

$$M\ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu M}{R^3}\mathbf{R} = \mathbf{F}, \tag{11.1.6}$$

où

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \\ &\mathbf{F}_1 = -\frac{3\mu}{R^5}\{\mathbf{R}\cdot(m\boldsymbol{\rho} + m_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha)\}\mathbf{R} + \frac{3\mu}{R^3}(m\boldsymbol{\rho} + m_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha), \\ &\mathbf{F}_2 = \frac{3}{2}\frac{\mu}{R^3}\left\{m\left[\left(\frac{\boldsymbol{\rho}}{R}\right)^2 - 5\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}}{R}\right)^2\right] + \right. \\ &\qquad \left. + m_\alpha\left[\left(\frac{\boldsymbol{\rho}_\alpha}{R}\right)^2 - 5\left(\frac{\mathbf{R}}{R}\cdot\frac{\boldsymbol{\rho}_\alpha}{R}\right)^2\right]\right\}\mathbf{R} + \\ &\qquad + \frac{3\mu m}{R^5}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho})\cdot\boldsymbol{\rho} + \frac{3\mu m_\alpha}{R^5}(\mathbf{R}, \boldsymbol{\rho}_\alpha)\cdot\boldsymbol{\rho}_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11.1.7}$$

Par définition de (11.1.3) et (11.1.4),

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_\alpha = \frac{m}{m + m_\alpha}(\mathbf{r}_\alpha - \mathbf{r}), \\ \boldsymbol{\rho} = \frac{m_\alpha}{m + m_\alpha}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha), \end{aligned}\right\} \tag{11.1.8}$$

$$m_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha + m\boldsymbol{\rho} = 0. \tag{11.1.9}$$

Si l'équation (11.1.6) ne contenait pas la force perturbatrice $\mathbf{F}$, elle donnerait un mouvement képlérien pour $\mathbf{R}(t)$. La présence de $\mathbf{F}$

« compromet » le mouvement képlérien. Or, nous voyons d'après (11.1.9) que, dans la décomposition (11.1.7) de la force $\mathbf{F}$, les termes du premier ordre de petitesse sont identiquement nuls, $\mathbf{F}_1 \equiv 0$. Le terme dominant dans $\mathbf{F}$ est donc du second ordre de petitesse par rapport aux quantités (11.1.5) (il est défini par la formule (11.1.7) pour $\mathbf{F}_2$). Par conséquent, $|\mathbf{F}|$ est extrêmement petit devant le terme dominant $\left|\frac{\mu M}{R^3}\mathbf{R}\right| = \frac{\mu M}{R^2}$ de l'équation (11.1.6). On a donc très exactement (à des effets du second ordre de petitesse près)

$$\ddot{\mathbf{R}} + \frac{\mu}{R^3}\mathbf{R} = 0. \tag{11.1.10}$$

Autrement dit, le centre de masse du système suit une orbite képlérienne.

2. Equations du mouvement relatif

Ainsi donc, nous avons mis le problème sous sa forme restreinte la plus usitée: on demande d'analyser le mouvement d'un système par rapport à son centre de masse qui se déplace suivant une orbite képlérienne donnée.

Puisqu'on a d'après (11.1.8)

$$\boldsymbol{\rho} = -\frac{m_\alpha}{m}\boldsymbol{\rho}_\alpha, \tag{11.2.1}$$

il suffit de considérer le mouvement d'un point isolé quelconque, par exemple du point m_α (le cosmonaute); le mouvement de l'autre point (la station orbitale) se définit alors par (11.2.1). Remarquons que si $m_\alpha/m \ll 1$ (la masse du cosmonaute est très inférieure à celle de la station), on a (à la limite pour $m_\alpha \to 0$) $|\rho| \sim 0$, si bien que le mouvement du point m_α par rapport au centre de masse du système (m_α, m) se confond presque avec le mouvement de m_α par rapport à m.

Le mouvement est soumis à la contrainte (11.1.5) qui reste invariable dans le temps à cause de la liaison (11.1.1): en analysant le mouvement relatif, il est donc logique de considérer seulement les équations pour de petits écarts par rapport au centre de masse du système.

A cet effet, proposons-nous de linéariser les équations (11.1.2) en $\boldsymbol{\rho}$ et $\boldsymbol{\rho}_\alpha$. Nous le ferons facilement en divisant la première équation (11.1.2) par m, la seconde par m_α et en les retranchant l'une de l'autre. Il vient

$$\left.\begin{aligned} \Delta\ddot{\mathbf{r}} + \mu\left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_\alpha}{r^3}\right) + 2\lambda\Delta\mathbf{r}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m_\alpha}\right) = 0; \\ \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{11.2.2}$$

En linéarisant cette équation en $\Delta\mathbf{r}$ compte tenu de la relation

$$\Delta\mathbf{r} = -\frac{m+m_\alpha}{m}\boldsymbol{\rho}_\alpha$$

tirée de (11.1.8), on obtient

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}}_\alpha + \frac{\mu}{R^3}\boldsymbol{\rho}_\alpha - \frac{3\mu}{R^5}\mathbf{R}(\mathbf{R},\ \boldsymbol{\rho}_\alpha) = \tilde{\lambda}_\alpha\boldsymbol{\rho}_\alpha, \qquad (11.2.3)$$

où

$$\tilde{\lambda}_\alpha = -2\lambda\frac{m_\alpha+m}{mm_\alpha}$$

est un nouveau multiplicateur inconnu. Au lieu de (11.1.1), la liaison se définit alors par l'inégalité

$$\rho_\alpha \leqslant \frac{m}{m+m_\alpha}l, \qquad (11.2.4)$$

et il doit y avoir en mouvement gêné $\tilde{\lambda}_\alpha < 0$.

C'est l'équation vectorielle (11.2.3) qui, associée à (11.2.4), décrit le mouvement d'un point de masse m_α (le cosmonaute) par rapport au centre de masse du système des points m, m_α (la station orbitale + le cosmonaute). Dans l'équation (11.2.3) $\mathbf{R}(t)$ est une fonction connue du temps définissant la trajectoire képlérienne du centre d'inertie du système. L'équation (11.2.3) est elle-même un cas particulier des équations linéaires déjà connues [11.2] qui définissent le mouvement en coordonnées de transport (voir le dixième essai).

Nous passons maintenant à l'examen du mouvement libre d'un point m_α par rapport au centre de masse du système des points m, m_α. On doit poser alors $\tilde{\lambda}_\alpha \equiv 0$ dans (11.2.3). La situation se présente ainsi : un cosmonaute s'est séparé du vaisseau sans y être attaché par un filin et sans avoir de moteur-fusée autonome. Que va-t-il lui arriver ?

3. Mouvement libre du cosmonaute par rapport à la station orbitale

Pour simplifier les choses, supposons que le centre de masse du système se déplace suivant une orbite circulaire et que le mouvement du cosmonaute se produit dans le plan de cette orbite. La masse du cosmonaute étant négligeable devant celle du vaisseau, nous ne ferons aucune distinction entre le centre de masse du vaisseau et celui du système vaisseau + cosmonaute.

Associons au vaisseau un système de coordonnées $O\eta\xi\zeta$ d'origine O en son centre de masse et dont les axes $O\eta$, $O\xi$, $O\zeta$ sont orientés en permanence suivant le rayon vecteur de l'orbite du satellite, la transversale et la normale au plan de l'orbite respectivement. Pour l'orbite circulaire de la station et le mouvement plan du cosmonaute,

les coordonnées courantes η, ξ de ce dernier vérifient les équations

$$\eta'' - 2\xi' - 3\eta = 0, \quad \xi'' + 2\eta' = 0. \tag{11.3.1}$$

Ces équations se déduisent facilement comme un cas particulier de l'équation vectorielle (11.2.3). Les apostrophes dans (11.3.1) signifient la dérivation par rapport au temps sans dimension $\tau = \omega_0 t$, où ω_0 est la vitesse angulaire de mouvement du centre de masse du satellite en orbite. Les équations (11.3.1) ne s'appliquent au mouvement du cosmonaute que lorsque le filin n'est pas tendu: on dit que le mouvement du cosmonaute est libre. Examinons ce mouvement. Les équations (11.3.1) se prêtent facilement à l'intégration. On obtient comme solution

$$\left.\begin{aligned} \eta &= 2c_1 + c_2 \sin\tau + c_3 \cos\tau, \\ \xi &= c_4 - 3c_1\tau + 2c_2 \cos\tau - 2c_3 \sin\tau, \end{aligned}\right\} \tag{11.3.2}$$

où les constantes arbitraires c_1, c_2, c_3, c_4 se laissent définir en fonction des données initiales (pour $\tau = 0$) du problème de la façon suivante:

$$c_1 = 2\eta_0 + \xi_0', \; c_2 = \eta_0', \; c_3 = -3\eta_0 - 2\xi_0', \; c_4 = \xi_0 - 2\eta_0'. \tag{11.3.3}$$

Pour mettre en évidence l'allure de la trajectoire du cosmonaute, remarquons que les coordonnées $\eta(\tau)$, $\xi(\tau)$ et le temps τ sont assujettis à vérifier la relation

$$\frac{(\eta - 2c_1)^2}{c_2^2 + c_3^2} + \frac{[\xi - (c_4 - 3c_1\tau)]^2}{4(c_2^2 + c_3^2)} = 1, \tag{11.3.4}$$

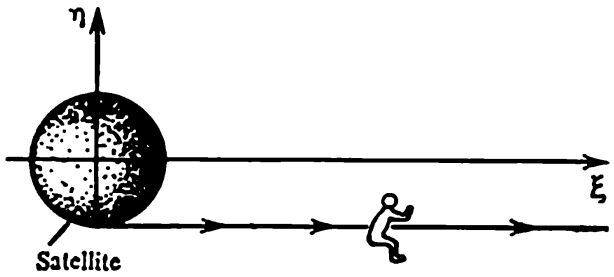


Fig. 11.2. Le cosmonaute animé d'un mouvement uniforme s'éloigne du satellite

facile à déduire de (11.3.2). On suppose que l'une au moins des constantes c_2, c_3 soit distincte de zéro, sans quoi, comme on le voit d'après (11.3.2), le cosmonaute, animé d'un mouvement uniforme, s'éloignera de la station le long de l'axe $O\xi$, c'est-à-dire suivant la tangente à l'orbite (fig. 11.2).

Il est bon de rappeler que nos équations linéaires (11.3.1) sont approximatives: en toute rigueur, le cosmonaute et la station parcourent tous les deux des orbites elliptiques voisines, et les équations (11.3.1) ne décrivent le mouvement relatif que dans un voisinage restreint de la station orbitale, c'est-à-dire tant que la distance entre le cosmonaute et la station reste faible devant l'orbite du vaisseau.

On voit de (11.3.3) que le cosmonaute s'éloignant de la station orbitale n'est animé d'un mouvement libre et uniforme qu'en l'absen-

ce de toute vitesse initiale dirigée le long du rayon vecteur du vaisseau (c'est une condition nécessaire mais non suffisante; il faut qu'il y ait en plus $c_3 = 0$).

Revenons à la formule générale (11.3.4) et considérons d'abord le cas où le cosmonaute effectue des mouvements périodiques. De (11.3.2) et (11.3.4), on voit que ce cas n'est possible que pour $c_1 \equiv 0$. La période des mouvements de cette nature coïncide avec la période de révolution de la station orbitale, et les mouvements eux-mêmes se produisent suivant une ellipse dont le centre est au point $\eta^* = 0$, $\xi^* = c_4$, le demi-petit axe est parallèle à l'axe $O\eta$ et égal à $\sqrt{c_2^2 + c_3^2}$ et le demi-grand axe est deux fois plus long (fig. 11.3). Il est possible en particulier que le cosmonaute reste « suspendu » au point $\eta = 0$, $\xi = \xi_0$ si, à l'instant initial, il se trouvait en ce point et

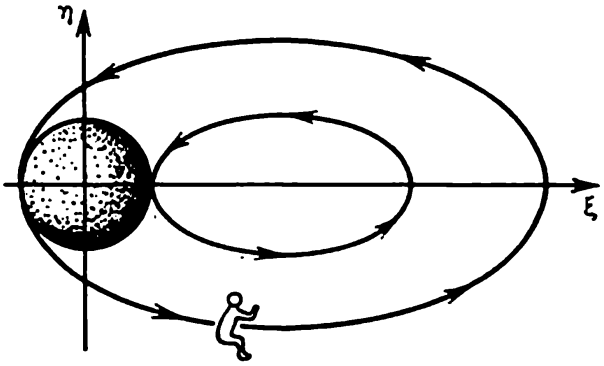


Fig. 11.3. Le cosmonaute en mouvement périodique

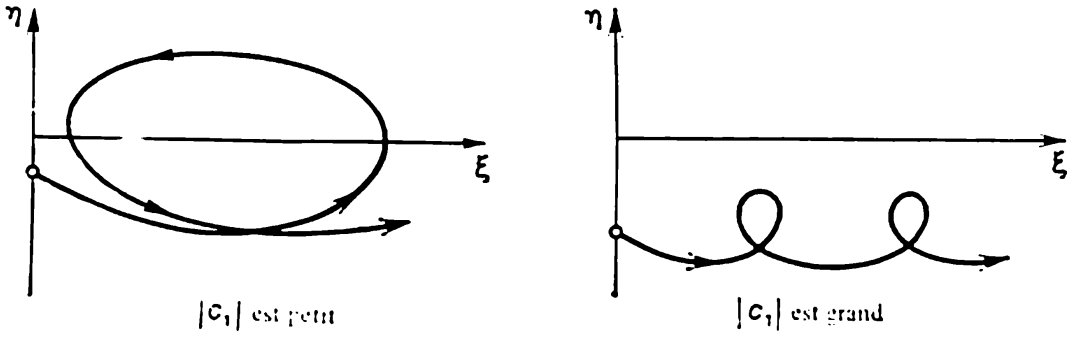


Fig. 11.4. Schéma du mouvement libre du cosmonaute par rapport à la station dans le cas général

était immobile par rapport au satellite; en ce cas le cosmonaute est animé par rapport à la Terre d'un mouvement qui suit la même orbite que la station (mais se trouve en un point différent de l'orbite). Il importe de noter cependant que l'état « suspendu » du cosmonaute et, en général, ses mouvements périodiques par rapport à la station sont instables; il suffit de modifier les données initiales de façon à avoir $c_1 \neq 0$ (même avec $|c_1|$ aussi petit que l'on veut) pour que toute périodicité cesse et le mouvement se trouve ramené à sa forme générale.

Dans le cas général la superposition du mouvement uniforme (fig. 11.2) et du mouvement périodique (fig. 11.3) donne un mouvement dont on voit la trajectoire sur la figure 11.4. La relation (11.3.4)

montre que c'est une ellipse de demi-axes $\sqrt{c_2^2 + c_3^2}$ et $2\sqrt{c_2^2 + c_3^2}$ allongée suivant l'axe $O\xi$. La coordonnée η^* du centre de l'ellipse reste fixe, $\eta^* = 2c_1$, tandis que la seconde coordonnée ξ^* du centre de l'ellipse se déplace uniformément le long de l'axe $O\xi$: $\xi^* = c_4 - 3c_1\tau$. De la sorte, pendant que le cosmonaute suit une portion de l'ellipse, celle-ci a le temps de se déplacer dans l'espace suivant l'axe $O\xi$.

Sauf exception, s'il n'est pas attaché à la station orbitale, le cosmonaute n'a donc aucune chance de regagner son vaisseau. Après un bref séjour dans le voisinage de la station, il s'en éloignera peu à peu, dépassé par le vaisseau (ou le dépassant lui-même). Quand la station aura fait une demi-révolution, le cosmonaute commencera à se rapprocher du vaisseau et passera peut-être même à proximité. Mais ce moment d'espoir est fugitif: le perfide mouvement relatif, après avoir fait décrire une pirouette au cosmonaute, éloignera de nouveau sa victime du vaisseau...

Le sort du pauvre cosmonaute serait alors déplorable: il devrait tourner sans fin autour de la Terre sur sa propre orbite, ayant perdu de vue le vaisseau abandonné. Au bout d'une multitude de révolutions le cosmonaute pourrait théoriquement se rapprocher de nouveau du satellite, mais ce sera sûrement trop tard...

Non, rien ne vaut un bon filin!

4. Léonov et le couvercle

Notre analyse du mouvement relatif permet de considérer non seulement le mouvement libre du cosmonaute par rapport à la station orbitale mais aussi le mouvement libre d'un objet quelconque par rapport à un corps quelconque mis en orbite. On peut par exemple suivre le mouvement d'un objet jeté (ou perdu) par le cosmonaute par rapport au cosmonaute lui-même.

C'est ce qui arriva, par exemple, lors de la sortie du cosmonaute soviétique Alexei Léonov du vaisseau spatial en orbite. Voici un extrait du reportage de Pavel Béliaïev et d'Alexei Léonov [11.4]:

« [...] *Il dévissa le couvercle protégeant la caméra fixée à l'extérieur du vaisseau. Où le mettre? En orbite peut-être? Et le cosmonaute le lança à tour de bras en direction de la Terre. Le petit objet étincelant dans les rayons du Soleil s'éloigna rapidement et disparut bientôt.* »

Il serait édifiant de voir ce qu'il advint du couvercle. En réfléchissant sur ce problème, on passe par plusieurs phases. La première est celle de l'étourderie. Nos habitudes terrestres nous portent à croire qu'un objet lancé en direction de la Terre finira par y tomber tout simplement.

En deuxième phase on se sent pris de doute: le cosmonaute se déplace par rapport à la Terre avec une vitesse vertigineuse, à environ

huit kilomètres par seconde! Quelle est la vitesse que Léonov aura pu imprimer au couvercle? Quelqu'un de costaud peut lancer un caillou à une vitesse de 15 à 20 mètres par seconde. Pour fixer les idées, supposons que la vitesse initiale du couvercle par rapport à Léonov soit de 10 m/s. En examinant le mouvement du couvercle par rapport à la Terre, on doit faire la somme géométrique de la vitesse du cosmonaute par rapport à la Terre et de celle du couvercle par rapport au cosmonaute (fig. 11.5). On voit que la vitesse résultante du couvercle ne se distingue pratiquement pas, en module et en direction, de sa vitesse initiale! Autrement dit, le couvercle se trouve simplement mis sur une autre orbite elliptique autour de la

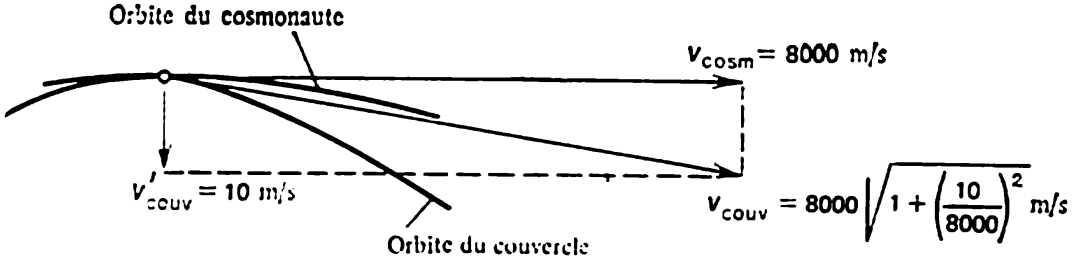


Fig. 11.5. Pour le problème du mouvement du couvercle

Terre, très voisine de l'orbite du cosmonaute. Est-il donc vrai que le couvercle, à en croire le cosmonaute, s'est éloigné rapidement en direction de la Terre?

Vient logiquement une troisième phase, celle de l'analyse. On se rend compte que le reportage ne décrit pas le mouvement du couvercle par rapport à la Terre mais seulement l'impression de Léonov! Autrement dit, il est nécessaire de considérer le mouvement du couvercle par rapport à Léonov. Très bien. Voyons les équations (11.3.2) qui définissent la trajectoire du mouvement relatif. Le couvercle étant lancé directement vers la Terre, on peut prendre comme données initiales $\eta_0 = \xi_0 = 0$, $\xi_0' = 0$, $\eta_0' \neq 0$. Alors, comme on le voit de (11.3.3), $c_1 = c_3 = 0$, $c_2 = \eta_0'$, $c_4 = -2\eta_0'$. Portant ces valeurs des constantes dans (11.3.2) ou dans (11.3.4), on voit que le couvercle décrit une trajectoire périodique par rapport à Léonov! (Voir fig. 11.6).

Si Léonov était resté en dehors du vaisseau pendant une révolution complète autour de la Terre, il aurait vu revenir le couvercle directement dans ses mains mais du côté opposé par rapport à la Terre. (Nous négligeons bien sûr toute une série de facteurs secondaires: le mouvement de Léonov au moment du lancement du couvercle peut être différent de celui que nous venons d'examiner, les perturbations existantes peuvent influencer de façons différentes le cosmonaute et le couvercle dans leur vol, et ainsi de suite.) En regardant le dessin qui représente la trajectoire du couvercle par rapport au cosmonaute,

on se demande si Léonov pouvait effectivement voir le couvercle s'éloigner rapidement en direction de la Terre?

C'est alors que commence la quatrième phase de la réflexion: celle des calculs. Dans le cas considéré la trajectoire se définit paramétriquement par les formules

$$\eta = \eta_0' \sin \tau, \quad \xi = 2\eta_0' (\cos \tau - 1) = -4\eta_0' \sin^2 \tau/2, \qquad (11.4.1)$$

avec $|\eta_0'| = v/V \approx 10$ m/s: 8000 m/s $= 0{,}125 \cdot 10^{-2}$, où v est la vitesse initiale du couvercle par rapport au cosmonaute au moment

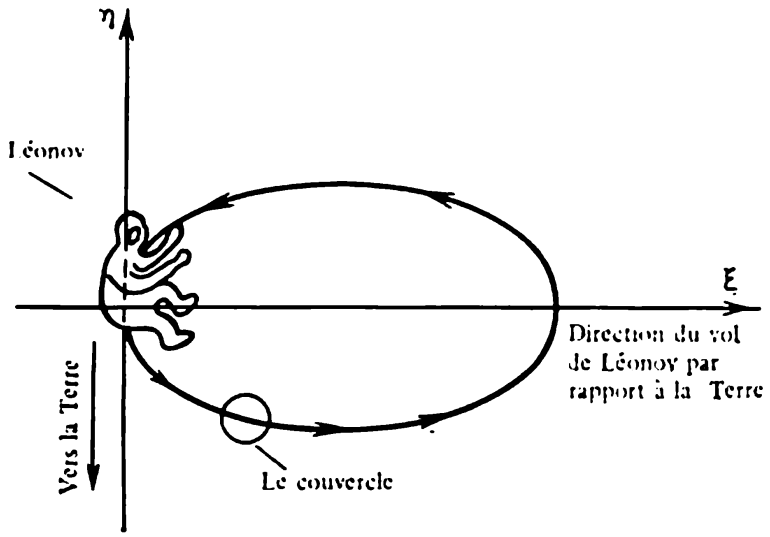


Fig. 11.6. Trajectoire périodique du couvercle

du lancement et V la vitesse du cosmonaute par rapport à la Terre.

Supposons que Léonov ait pu observer le comportement du couvercle pendant une minute et demie ($t = 1{,}5$ mn). Alors $\tau = \omega t = 2\pi \frac{t}{T} = 2\pi \frac{1{,}5}{90}$, où $T = 90$ mn est la période de révolution de Léonov. En degrés $\tau = \frac{360 \cdot 1{,}5}{90} = 6°$. Portant les valeurs numériques de η_0' et de τ dans la formule (11.4.1), calculons les coordonnées du couvercle par rapport au cosmonaute: $\eta = -0{,}131 \cdot 10^{-3}$, $\xi = 0{,}0137 \cdot 10^{-3}$. Pour obtenir des grandeurs avec dimension, il faut multiplier ces nombres par la distance entre le centre de la Terre et le cosmonaute. Soit cette distance $R = 6600$ km. Alors $\tilde{\eta} = \eta R \approx -865$ m, $\tilde{\xi} = \xi R \approx 90$ m. Or, la coordonnée η correspond au déplacement du couvercle vers la Terre et ξ à son déplacement suivant la transversale.

Il est peu probable que l'on puisse suivre à l'œil nu le trajet d'un objet minuscule à presque 1 km de distance. Même si c'était possible, on aurait beaucoup de difficulté à remarquer la déviation du couvercle par rapport à la direction radiale, car cette déviation

n'excède pas le dixième (à peu près) de l'espace parcouru. En réalité, cet écart transversal est encore plus faible, car il est très probable que Léonov ait perdu de vue le couvercle beaucoup plus vite. La conclusion est donc la suivante: tant qu'on peut distinguer le couvercle, on a l'impression qu'il se déplace en direction de la Terre. En lançant le couvercle en direction de la Terre, Léonov l'aurait tout bêtement vu tomber sur la Terre!

5. Sonde spatiale

En analysant le mouvement libre d'un corps par rapport à l'autre, nous avons supposé que la distance entre les corps était faible, ce qui permettait de faire l'analyse avec des équations linéarisées.

Il y a cependant des problèmes où l'on est obligé d'examiner le mouvement relatif de corps très éloignés l'un de l'autre. Tel est, par exemple, le problème de la sonde solaire. Imaginons-nous un engin spatial qui, lancé de la Terre, a pour mission d'explorer les profondeurs de l'espace avant de rentrer quelques mois (ou années) plus tard. Au cours de son vol cette station scientifique automatique, appelée *sonde spatiale*, collecte et emmagasine l'information sur l'espace interplanétaire pour la ramener ensuite elle-même à la Terre. Une telle trajectoire est-elle réalisable? De toute évidence, oui. Si la sonde parcourt autour du Soleil une orbite elliptique de période commensurable avec la période de révolution de la Terre, il est naturel que la sonde rencontrera périodiquement la Terre. Par exemple, si l'orbite de la sonde a une période d'un an et demi, la sonde retournera à la Terre au bout de trois ans. Ce problème, aussi intéressant qu'important, se réduit alors à considérer le mouvement de la sonde par rapport à la Terre et non par rapport au Soleil.

V. Egorov a examiné un tel problème dans [11.5]. Les figures 11.7 et 11.8 que l'auteur en a tirées représentent les trajectoires de la sonde spatiale d'abord par rapport à un système de coordonnées associé à la Terre en rotation (fig. 11.7), puis en coordonnées absolues (fig. 11.8). Une de ces trajectoires a une période de 4/5 de l'année dans son mouvement autour du Soleil et passe au plus près du Soleil à 108 millions de kilomètres; quant à la distance maximale, elle se confond évidemment avec le rayon de l'orbite de la Terre et est donc égale à 149 millions de kilomètres. Quatre années séparent un rendez-vous sonde-Terre de l'autre; pendant ce temps la sonde fait cinq révolutions autour du Soleil. L'autre trajectoire a une période (autour du Soleil) d'un an et demi; la sonde revient à la Terre au bout de trois ans. La sonde se rapproche du Soleil à 149 millions de kilomètres et s'en éloigne à 242 millions de kilomètres.

Les sondes spatiales remplissant différentes missions dans l'espace peuvent aussi avoir d'autres périodes de révolution, par exemple

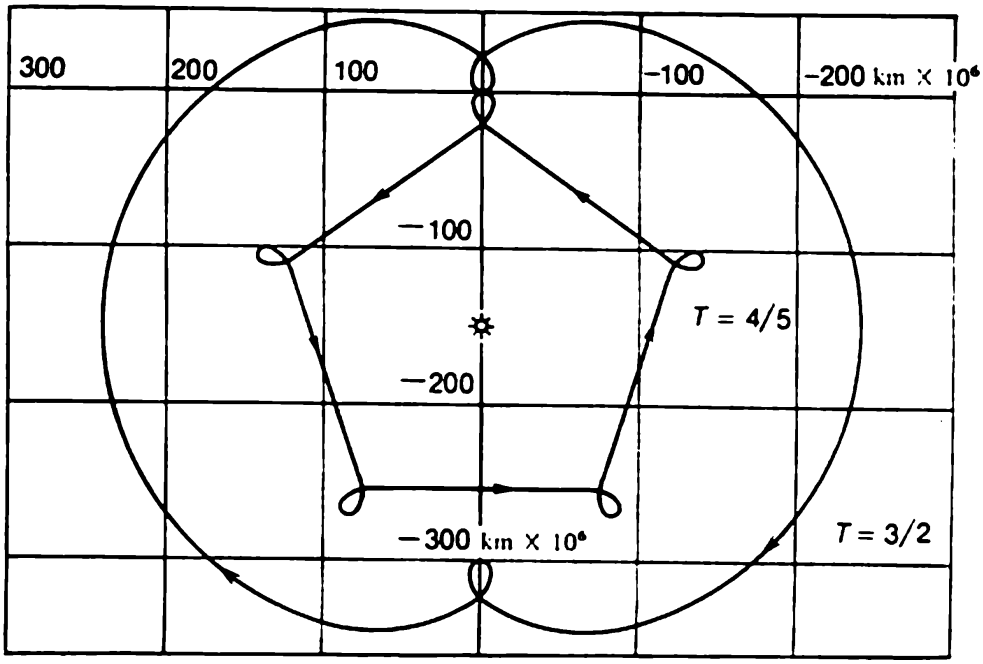


Fig. 11.7. Deux trajectoires de la sonde spatiale par rapport à la Terre

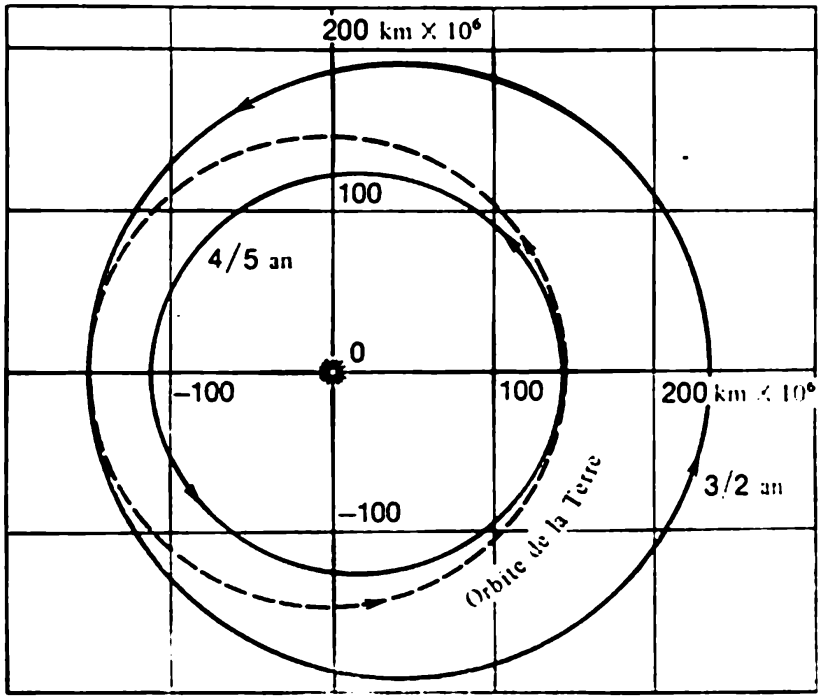


Fig. 11.8. Deux trajectoires de la sonde spatiale par rapport au Soleil

3/4 et 2/3 de l'année, ou encore 2 ans, 3 ans, et ainsi de suite.

Revenons cependant au problème précédent dans lequel un point se déplace au voisinage d'un autre.

6. *Boleadoras* cosmique

A présent, nous aborderons directement le problème de dynamique d'une grappe de deux corps mise en orbite [11.1, 11.2]. C'est un système de deux solides reliés par un filin « parfait » (fig. 11.1). Il ressemble au *boleadoras* argentin dont on se sert pour capturer le bétail redevenu à moitié sauvage dans les pampas. Gerald Durrell donne une description pittoresque d'une application plus insolite de cette arme:

« *Tous les peons avaient sorti leurs* boleadoras, *et je voyais les boules briller aux bouts des cordes qu'ils faisaient tournoyer au-dessus de leur tête. Les nandous firent demi-tour tous ensemble et foncèrent en notre direction.* [...] *Le léger sifflement du* boleadoras *s'amplifia soudain pour devenir une sorte de bourdonnement. La corde à boules s'envola dans l'air et vint s'enrouler autour du cou et des pattes de l'oiseau, telles les tentacules d'une pieuvre. Le nandou fit encore deux pas en courant, mais la corde se tendit et l'oiseau tomba par terre en agitant les pattes et les ailes.* » (G. Durrell, *La forêt ivre*).

Nous parlerons dans le texte qui suit du cosmonaute et de la station orbitale reliés par un filin ; il convient de se rappeler cependant que ce schéma simplifié convient également à d'autres systèmes mis en orbite, par exemple à un satellite constitué de deux compartiments indépendants reliés par un câble.

Nous n'avons parlé jusqu'à présent que du mouvement libre du cosmonaute. Or, l'analyse montre que dans le cas général le cosmonaute s'éloigne inévitablement de la station (à moins de tomber sur une orbite périodique, ce qui est peu probable). Au bout d'un certain temps il s'en trouve éloigné autant que le permet la longueur l du filin. C'est le moment le plus intéressant: l'avenir du cosmonaute dépend essentiellement des propriétés élastiques du filin. Supposons qu'il soit parfaitement inélastique. Cette hypothèse est essentielle, car un filin élastique peut perturber complètement le mouvement du cosmonaute.

Ainsi donc, le cosmonaute s'est éloigné de la station à une distance égale à la longueur totale l du filin. Considérons le mouvement du satellite à partir de cet instant en supposant que les données initiales de ce mouvement soient connues (ne soit-ce que du problème précédent sur le mouvement libre du cosmonaute). Postérieurement à l'instant décrit, on peut s'attendre généralement à ce que le cosmonaute ou bien continue à se déplacer en mouvement libre, ou bien commence à parcourir un arc de cercle de rayon l autour du centre

de masse du vaisseau. Dans le second cas, on dit que le mouvement du cosmonaute est *gêné*.

Dans quelles conditions le mouvement libre devient-il gêné? Quelle est la nature du mouvement gêné? Le mouvement gêné peut-il redevenir libre et dans quelles conditions? Nous tâcherons de répondre à ces questions.

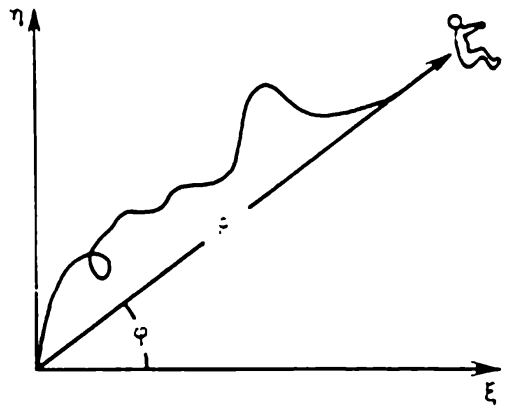


Fig. 11.9. Coordonnées polaires

A l'instant où le cosmonaute atteint un point de la sphère de rayon l ou, dans le cas plan considéré, un point de la circonférence de rayon l (on dit simplement que le cosmonaute « atteint la sphère »), la composante de la vitesse dirigée le ong du filin et orientée dans le sens opposé par rapport à la station s'annule par manque d'élasticité du filin. Et au contraire, la composante normale au filin tendu subsiste. On déduit sans peine des équations (11.3.1) l'intégrale de la demi-force vive sous la forme

$$\eta'^2 + \xi'^2 - 3\eta^2 = h = \text{Cte}. \qquad (11.6.1)$$

Introduisons les coordonnées polaires ρ, φ de telle sorte que

$$\eta = \rho \sin \varphi, \quad \xi = \rho \cos \varphi \qquad 11.6.2)$$

(fig. 11.9). Traduite en ces variables l'intégrale (11.6.1) s'écrit

$$\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2 - 3\rho^2 \sin^2 \varphi = h. \qquad (11.6.3)$$

Dans le mouvement libre du cosmonaute qui prend fin lorsque le cosmonaute atteint la sphère, l'énergie h est conservée, si bien qu'à l'instant final τ_f on a

$$h_f^{(0)} = \rho_f'^2 + \rho_f^2\varphi_f'^2 - 3\rho_f^2 \sin^2 \varphi_f = \rho_0'^2 + \rho_0^2\varphi_0'^2 - 3\rho_0^2 \sin^2 \varphi_0, \qquad (11.6.4)$$

où $\rho_f = l$ (l'indice « 0 » correspond aux valeurs initiales des variables et l'indice « f » à leurs valeurs finales au moment où le cosmonaute atteint la sphère). Comme nous l'avons dit, la vitesse radiale ρ' tombe instantanément à zéro mais la vitesse transversale $\rho\varphi'$ est entièrement conservée *). Cela signifie que l'énergie passe instanta-

*) On le démontre rigoureusement en appliquant le théorème de Carnot de la variation de l'énergie cinétique dans le choc inélastique. D'après ce théorème, l'énergie cinétique perdue ΔT est égale à l'énergie cinétique que le système posséderait si on attribuait à ses points les vitesses perdues dans le choc, de sorte que

$$2\Delta T = (\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2)_1 - (\rho'^2 + \rho^2\varphi'^2)_2 = (V_1 - V_2)^2.$$

nément, elle aussi, de sa valeur $h_f'^{(0)}$ définie par (11.6.4) à la valeur

$$h_f'^{(1)} = \rho_f^2 \varphi_f'^2 - 3\rho_f^2 \sin^2 \varphi_f, \quad \rho_f = l.$$

A partir de cet instant le mouvement se produit sur une sphère de rayon $\rho = l$. Pour déterminer complètement ce mouvement, on doit connaître la variation de $\varphi(\tau)$; celle-ci est obtenue par intégration de l'équation

$$\varphi'^2 - 3 \sin^2 \varphi = h_1, \tag{11.6.5}$$

où $h_1 = h_f'^{(0)}/l^2$. Obtenue de (11.6.3) pour $\rho' = 0$ et $\rho = l$, l'équation (11.6.5) est l'intégrale de la demi-force vive d'un mouvement analogue à celui d'un pendule composé ; elle se prête à l'intégration mais peut aussi être résolue analytiquement.

Or, pour que le mouvement décrit par l'équation (11.6.5) soit possible, il faut absolument que le filin soit tendu : à son tour, ce cas a lieu seulement lorsque la dérivée ρ'' est strictement positive. En effet, puisqu'on a sur la sphère $\rho' = 0$, la condition $\rho'' > 0$ veut dire que la vitesse radiale tend à croître, c'est-à-dire que le cosmonaute tend à quitter la sphère le long du rayon ρ. Cependant, le filin tendu le retient malgré ses efforts, si bien que la valeur de la vitesse radiale reste constante (égale à zéro).

Supposons maintenant que $\rho'' < 0$; le filin prend aussitôt du « mou » ! En effet, la condition proposée veut dire que la vitesse radiale décroît, donc devient inférieure à 0. En ce cas le cosmonaute rentre à l'intérieur de la sphère, car rien ne l'en empêche. On comprend donc à quel point il est important de connaître la valeur de ρ'' sur la sphère. Cherchons cette valeur. On a sur la sphère $\rho' = 0$ et $\rho = l$. Ecrivons donc, compte tenu de l'équation du mouvement (11.3.1),

$$\frac{1}{l}\rho'' = \varphi'^2 - 2\varphi' + 3\sin^2\varphi.$$

Si donc

$$\varphi'^2 - 2\varphi' + 3 \sin^2 \varphi > 0, \tag{11.6.6}$$

le mouvement est décrit par l'intégrale (11.6.5). Si par contre

$$\varphi'^2 - 2\varphi' + 3 \sin^2 \varphi < 0, \tag{11.6.7}$$

le mouvement « se décroche » de la sphère et passe à l'intérieur. L'inégalité (11.6.7) définit donc la condition pour que le mouvement devienne libre, tandis que les relations (11.6.5) et (11.6.6) déterminent

L'indice « 1 » correspond à l'instant antérieur au choc et l'indice « 2 » à l'instant postérieur ; de toute évidence $\rho_1' \neq 0$, $\rho_2' = 0$, $\rho_1 = \rho_2$, $\varphi_1' \neq 0$, φ_2' est inconnu et

$$V_1 = \rho_1' \rho_0 + \rho_1 \varphi_1' \tau_0, \quad V_2 = \rho_2 \varphi_2' \tau_0 = \rho_1 \varphi_2' \tau_0,$$

où ρ_0 et τ_0 sont les vecteurs unités radial et transversal. En calculant le carré de la différence $(V_1 - V_2)^2$ et en le portant dans la formule de la perte d'énergie cinétique ci-dessus, on s'assure que $\varphi_1' = \varphi_2'$.

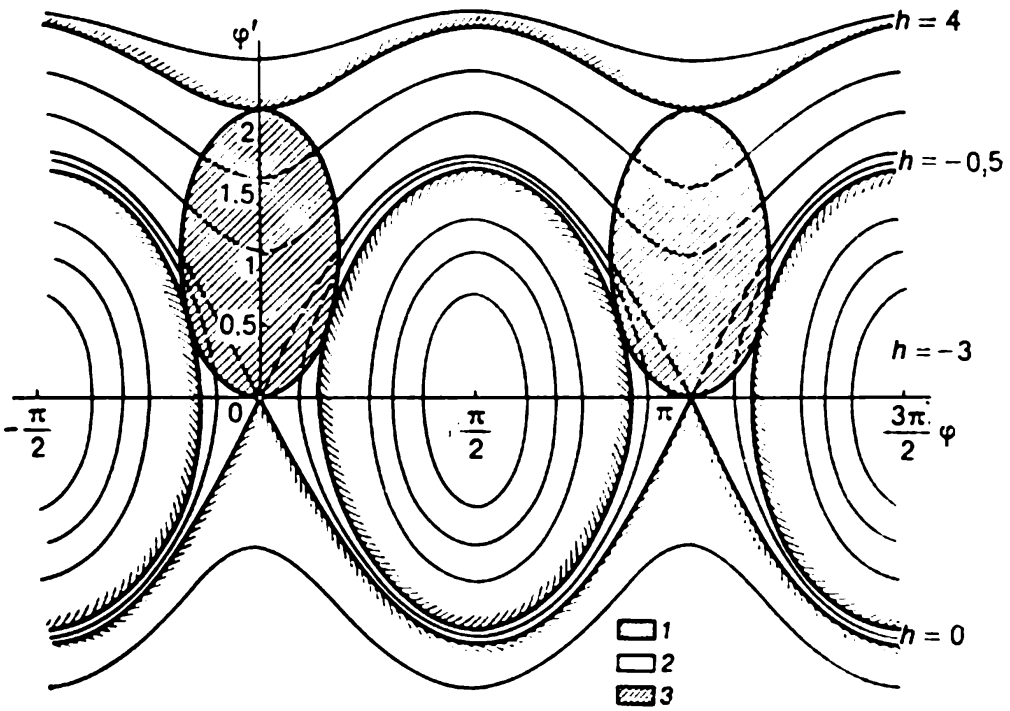


Fig. 11.10. Plan de phases: *1*, zones du mouvement gêné non évolutif; *2*, zones du mouvement évolutif (le mouvement gêné le long des courbes intégrales passe au mouvement libre à la frontière d'une zone *3*); *3*, « zones de décrochage »

le mouvement gêné. Il est commode d'analyser ces mouvements dans le plan de phases φ, φ' (fig. 11.10). Les courbes intégrales (11.6.5) représentées sur la figure correspondent au mouvement gêné. Les « zones de décrochage » vérifiant (11.6.7) sont hachurées. Quant au mouvement libre dans une « zone de décrochage », il ne peut pas être représenté dans le plan de phases φ, φ', tout d'abord parce que le plan de phases du mouvement libre est à quatre dimensions.

Considérons d'abord les mouvements du cosmonaute pendant lesquels il n'entre pas dans la « zone de décrochage » mais reste en permanence sur la sphère, le filin tendu. Le portrait de phases (fig. 11.10) montre que le cosmonaute peut avoir alors des mouvements de deux types: un mouvement rotatif (mouvement continu à sens unique suivant la circonférence) ou un mouvement oscillant autour de la direction du rayon vecteur de la station orbitale (par définition de l'angle φ, les valeurs $\varphi = \pi/2$ et $\varphi = 3\pi/2$ signifient que le filin est tendu suivant le rayon vecteur de la station; si $\varphi = \pi/2$, le cosmonaute est plus éloigné de la Terre que le vaisseau, et si $\varphi = 3\pi/2$, le cosmonaute est plus près de la Terre). Ecrivons les conditions dans lesquelles le cosmonaute passe au régime rotatif ou oscillatoire sans entrer en mouvement libre.

Remarquons que, d'une façon générale, les oscillations sont séparées des rotations par une courbe (dite *séparatrice*) passant par

l'origine des coordonnées et correspondant par suite à la valeur $h_1 = 0$ dans (11.6.5). Pour $h_1 > 0$ on a une rotation et pour $h_1 < 0$ un mouvement oscillant (nous ne parlons pas encore du « décrochage »). En examinant le « portrait de phases » (fig. 11.10), on remarque que

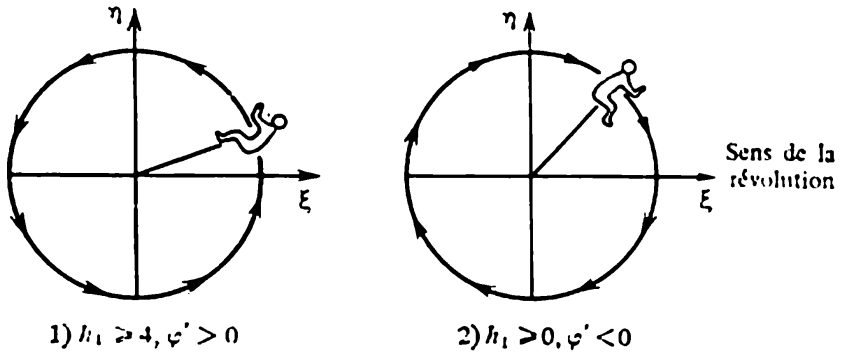


Fig. 11.11. Rotation du cosmonaute (filin tendu)

le cosmonaute tourne dans un sens unique sans entrer en mouvement libre dans les deux cas suivants:

1° $h_1 \geqslant 4$ dans le domaine $\varphi' > 0$;

2° $h_1 \geqslant 0$ dans le domaine $\varphi' < 0$.

Les mouvements du cosmonaute répondant à ces cas sont illustrés sur la figure 11.11. La condition du mouvement oscillant « sans

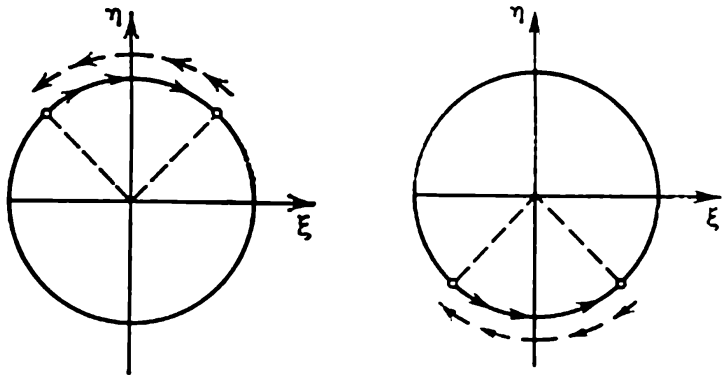


Fig. 11.12. Oscillation du cosmonaute (filin tendu)

décrochage » est l'inégalité $h_1 < h_1^*$, où h_1^* se définit par les conditions de tangence des courbes: $\varphi'^2 - 3\sin^2\varphi - h_1 = 0$ et $\varphi'^2 - 2\varphi' + 3\sin^2\varphi = 0$. On voit sans peine qu'au point où la courbe de phases du mouvement oscillant vient en contact avec la courbe délimitant une « zone de décrochage », on a $\varphi' = 1/2$, $\sin\varphi = -1/2$, donc $h_1^* = -1/2$.

Si donc

3° $h_1 \leqslant -1/2$,

le cosmonaute effectue des oscillations par rapport à la direction du rayon vecteur de la station orbitale sans entrer en mouvement libre (fig. 11.12). Il existe évidemment une amplitude maximale des

oscillations « sans décrochage ». Elle se déduit de (11.6.5) en posant $h_1 = h_1^* = -1/2$, $\varphi' = 0$, d'où $\sin^2 \varphi = 1/6$. Compte tenu de la définition de l'angle φ, on s'assure que l'amplitude maximale des oscillations autour du rayon vecteur est

$$a_{max} \approx 65°55'.$$

Les oscillations « pures » d'amplitude supérieure à a_{max} sont impossibles: le « décrochage » vers le mouvement libre se produit inévitablement.

Dans les cas 1° à 3° considérés ci-dessus, le système se déplace d'une façon analogue au déplacement d'un « haltère » rigide en orbite par rapport à son propre centre de masse (voir le sixième essai).

Enfin, si

4° $-1/2 < h_1 < 0$,

on a des oscillations « avec décrochage » vers le mouvement libre, et si

5° $0 \leqslant h_1 \leqslant 4$, $\varphi' > 0$,

on a des rotations « avec décrochage » vers le mouvement libre.

Les domaines 4°, 5° constituent la zone du mouvement mixte inachevé. Examinons-le de plus près.

7. Evolution du mouvement mixte

Supposons que le mouvement sur la sphère se produise suivant la courbe de phases répondant à la valeur h_1 de la constante d'énergie dans (11.6.5) et qu'un « décrochage » ait lieu ensuite. On se demande si

a) le mouvement peut revenir à la sphère après avoir quitté la « zone de décrochage »?

b) dans l'affirmative, sur quelle courbe de phases?

La réponse à la première question est en général positive, car, d'après les propriétés du mouvement libre étudiées plus haut, nous savons que, tôt ou tard, le cosmonaute atteindra de nouveau la sphère.

La deuxième question est plus délicate. On est obligé de suivre le mouvement libre après « décrochage » jusqu'au moment où le cosmonaute atteint de nouveau la sphère, puis de calculer la coordonnée angulaire et la vitesse à ce moment. Ce calcul associe à un point (φ_1, φ_1') du plan de phases un autre point (φ_2, φ_2'). Le point (φ_1, φ_1') est à la frontière de la « zone de décrochage »; il sert de « butée » à la courbe intégrale du mouvement antérieur au « décrochage ». Le point (φ_2, φ_2') est l'origine d'une nouvelle phase du mouvement gêné; le mouvement se poursuit le long d'une courbe intégrale sur laquelle est situé le point (φ_2, φ_2') (sauf si (φ_2, φ_2') se trouve à l'intérieur de la « zone de décrochage »). Ainsi donc, pour faire comprendre l'allure du mouvement, on doit construire les

images par transformation ponctuelle des portions de la frontière de la « zone de décrochage ».

La méthode d'étude des problèmes de mécanique non linéaire utilisant des constructions pareilles s'appelle *méthode des transformations ponctuelles*. Elle s'avère utile pour analyser un mouvement dont les différentes phases se définissent par des systèmes différents d'équations différentielles. La transformation ponctuelle décrite

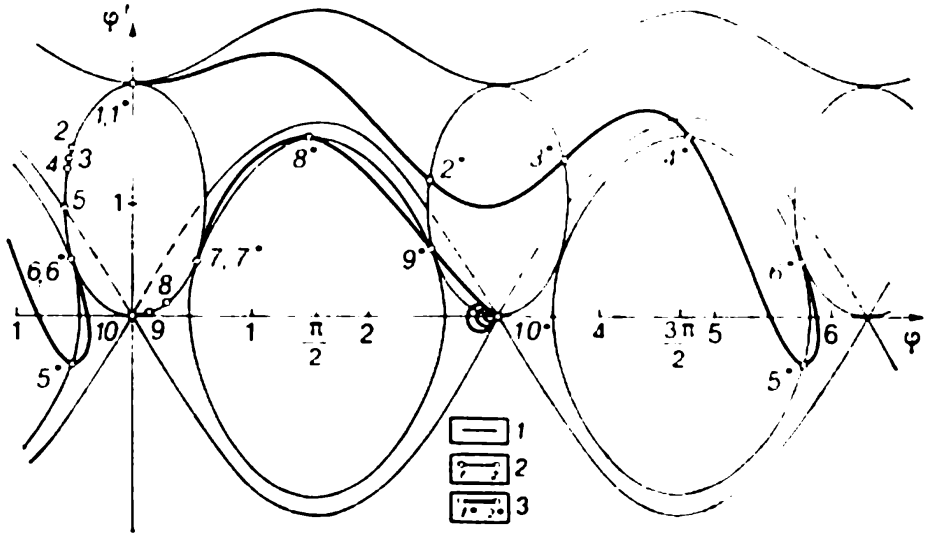


Fig. 11.13. Transformation ponctuelle des frontières de la « zone de décrochage »: *1*, trajectoires de phases et limites de la « zone de décrochage »; *2*, portions de la frontière de la « zone de décrochage »; *3*, leurs images. Les portions (*1,1*-7,7**) et (*6,6*-10*) n'admettent pas de transformés

ici a été construite par des méthodes numériques, à l'aide d'un ordinateur. Le résultat du calcul est illustré sur la figure 11.13. N'y est représenté le transformé que d'une zone de décrochage; celui de la seconde zone est parfaitement analogue.

L'essentiel est que cette transformation rend compte de toute l'évolution du mouvement (et non seulement de sa deuxième phase). En effet, si l'on connaît la transformation $(\varphi_1, \varphi_1') \to (\varphi_2, \varphi_2')$ pour n'importe quel point (φ_1, φ_1') situé à la frontière de la « zone de décrochage », la nature du mouvement ultérieur devient claire: le point (φ_2, φ_2') définit une courbe intégrale qui, arrivée de nouveau à la frontière de la « zone de décrochage », vient buter contre un point $(\varphi_1'^{(1)}, \varphi_1'^{(1)})$ dont nous savons obtenir le transformé $(\varphi'^{(1)}_2, \varphi_2'^{(1)})$, etc.

L'analyse devient plus difficile quand le point initial ou son image se trouvent à l'intérieur de la « zone de décrochage ». Physiquement, cela veut dire que le filin se tend et se relâche instantanément, si bien qu'un seul point de la trajectoire (et non une portion déterminée) appartient à la sphère. On se trouve donc obligé de construire les transformés ponctuels non seulement pour les frontières de la

« zone de décrochage » mais encore pour la zone tout entière si l'on veut analyser le mouvement dans sa totalité. Pour plus de détails, nous conseillons au lecteur de voir notre article [11.2]. Notons cependant que la circonstance signalée n'est pas très importante pour l'évolution du mouvement.

Il est très commode de suivre l'évolution du mouvement à l'aide de la courbe énergétique qui définit l'énergie h_2 après la mise en action de la liaison (après le choc) en fonction de l'énergie h_1 avant la mise en action de la liaison. La courbe énergétique h_2 (h_1) est donnée sur la figure 11.14. Soit h_1 l'énergie initiale. Cherchons sur le schéma la valeur correspondante h_2, établissons-nous sur h_2 comme sur une nouvelle valeur initiale h_1, cherchons de nouveau h_2, et ainsi de suite. Un tel processus étagé traduit la variation étagée de l'énergie lors des matérialisations successives de la liaison. On voit sans peine en examinant la courbe qu'au bout d'un nombre fini ou infini de mises en action de la liaison on se trouve en présence d'un mouvement limite dont l'énergie ne change plus. Un tel mouvement limite peut avoir par exemple $h = 1$. Partiellement gêné et partiellement libre, ce mouvement mixte est représenté sur la figure 11.15. Le temps au bout duquel ce régime limite est atteint est fini, mais l'ensemble des valeurs initiales de l'énergie conduisant à ce régime est discret (« de mesure nulle » par rapport à l'ensemble de toutes les valeurs initiales de l'énergie). La réalisation d'un tel régime est donc peu probable (au sens strict la probabilité est nulle).

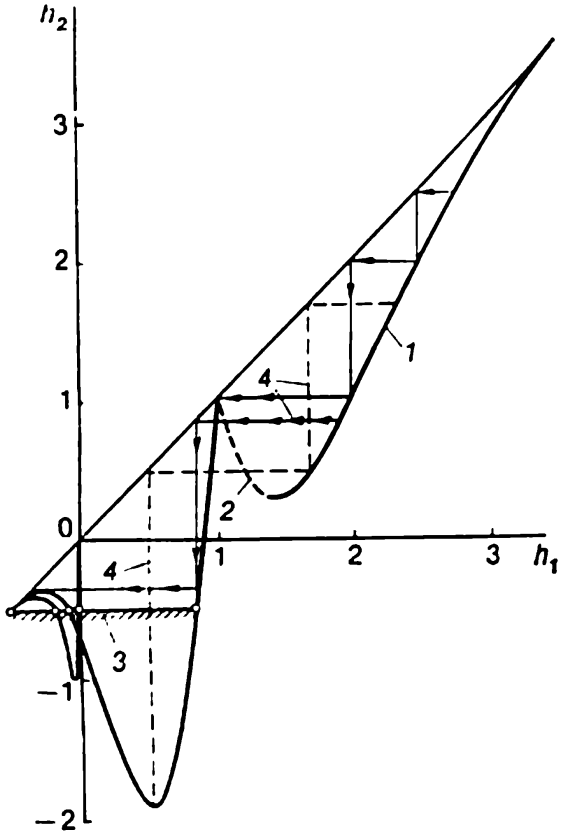


Fig. 11.14. Courbe énergétique

On observe un phénomène analogue en analysant une série infinie de régimes limites périodiques à faible énergie négative, dont quelques-uns sont montrés sur la figure 11.16. Leur période est très grande : les oscillations à énergie négative faible ont lieu suivant des portions de courbes de phases voisines de la séparatrice ; chaque « onde » de mouvement libre correspond à la demi-période de révolution de la station orbitale.

Il existe cependant des régimes limites pour lesquels les ensembles des valeurs initiales de l'énergie ne sont pas discrets mais denses. Ce sont des mouvements gênés purs, des oscillations autour de la position d'équilibre relatif avec des énergies $-1{,}85 \leqslant h \leqslant -0{,}5$. Au bout d'un temps fini le mouvement prend la forme d'oscillations avec un h appartenant à l'intervalle indiqué. Il se peut cependant que le mouvement tende indéfiniment vers des oscillations avec $h = -0{,}5$. Tous les mouvements limites possibles sont indiqués sur la figure 11.17 et dans les tableaux 11.1, 11.2.

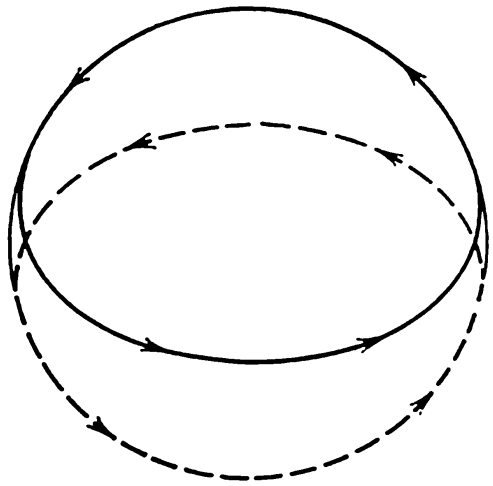


Fig. 11.15. Mouvement périodique avec $h = 1$

Le lecteur comprend parfaitement que l'évolution décrite ne concerne pas directement le mouvement réel du cosmonaute à proximité de la station orbitale. Tout d'abord point n'est besoin de prendre des intervalles de temps infinis et des mouvements limites pour analyser le mouvement du cosmonaute. Mais on peut très bien le faire pour n'importe quel système de deux corps reliés par un câble et lancés dans l'espace interplanétaire : un satellite, par exemple, composé de deux modules indépendants. Son mouvement relatif

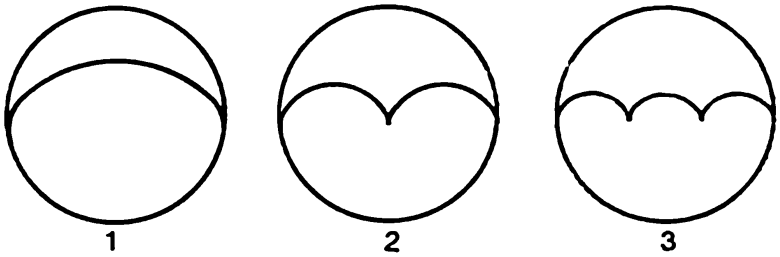


Fig. 11.16. Régimes périodiques à énergie négative

se définit comme nous venons de le faire. On utilise des satellites de ce type en particulier pour réaliser leur orientation par rapport à la Terre à l'aide des forces de gravité (le système d'orientation gravitationnelle passive dont nous avons parlé dans le sixième essai). Pour ces satellites, la question du régime limite est essentielle. On veut qu'à la limite les satellites soient strictement orientés sur la Terre. (Dans le schéma considéré ici, nous voyons que si, dès le début de la première phase de mouvement gêné, les oscillations par rapport à la direction vers la Terre ont pris une amplitude supérieure ou

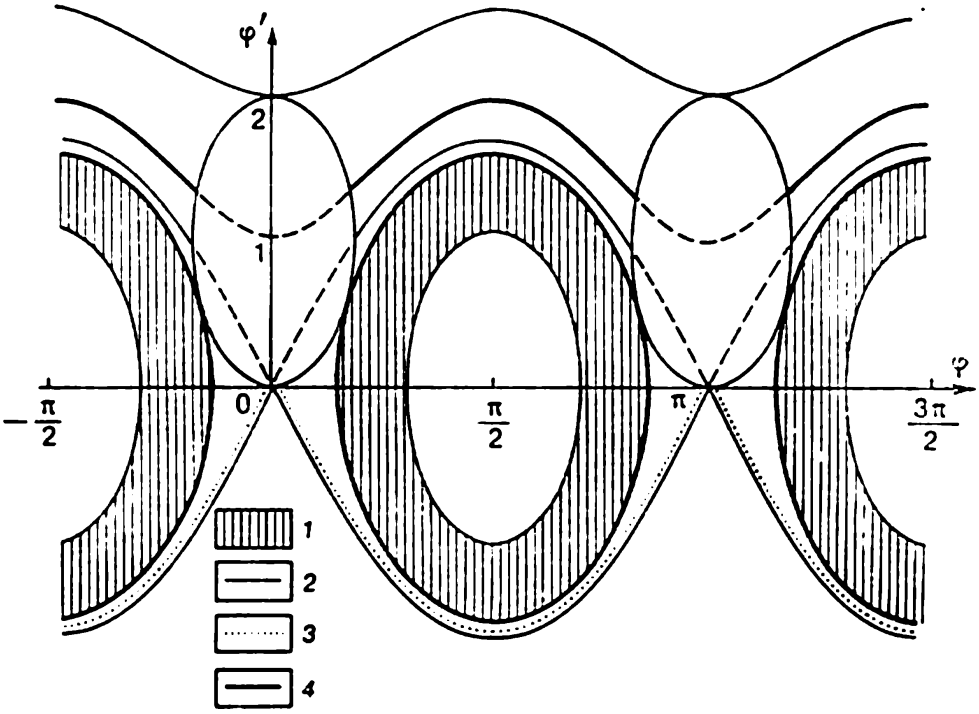


Fig. 11.17. Régimes limites dans le plan de phases: *1*, ensemble des régimes limites ayant comme frontière le cycle limite avec $h = -0{,}5$; *2*, trajectoires de phases et frontières de la « zone de décrochage »; *3*, domaine des mouvements limites avec $h = -0{,}00825$, $h = -0{,}00095$, etc.; *4*, cycle limite avec $h = -0{,}5$ et mouvement limite avec $h = 1$

égale à 48° ($h = -1{,}85$), on n'a aucune chance d'obtenir un jour des oscillations d'amplitude plus petite que 48°.)

En admettant que la liaison soit parfaitement inélastique, nous avons simplifié considérablement l'état réel des choses. En réalité, le choc accompagnant la mise en action de la liaison est partiellement élastique; en outre, l'énergie est dissipée en partie pendant le mouvement « libre » à cause des flexions et des torsions du câble, si bien que le mouvement a un caractère plus compliqué. Ce problème relève

Tableau 11.1

Les mouvements qui n'aboutissent pas à la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$

Ensemble des valeurs initiales conduisant au mouvement	Nature du mouvement
$2\eta_0+\xi_0'=0$, $\lvert c_4\rvert+2\sqrt{c^{2/2}+c^{2/3}}\leqslant 1$, $c_2=\eta_0'$, $c_3=-3\eta_0-2\xi_0'$, $c_4=\xi_0-2\eta_0'$	Périodique, avec période de révolution, suivant l'ellipse $\eta^2/(c^{2/2}+c^{2/3})+(\xi-c_4)^2/4\,(c^{2/2}+c^{2/3})=1$

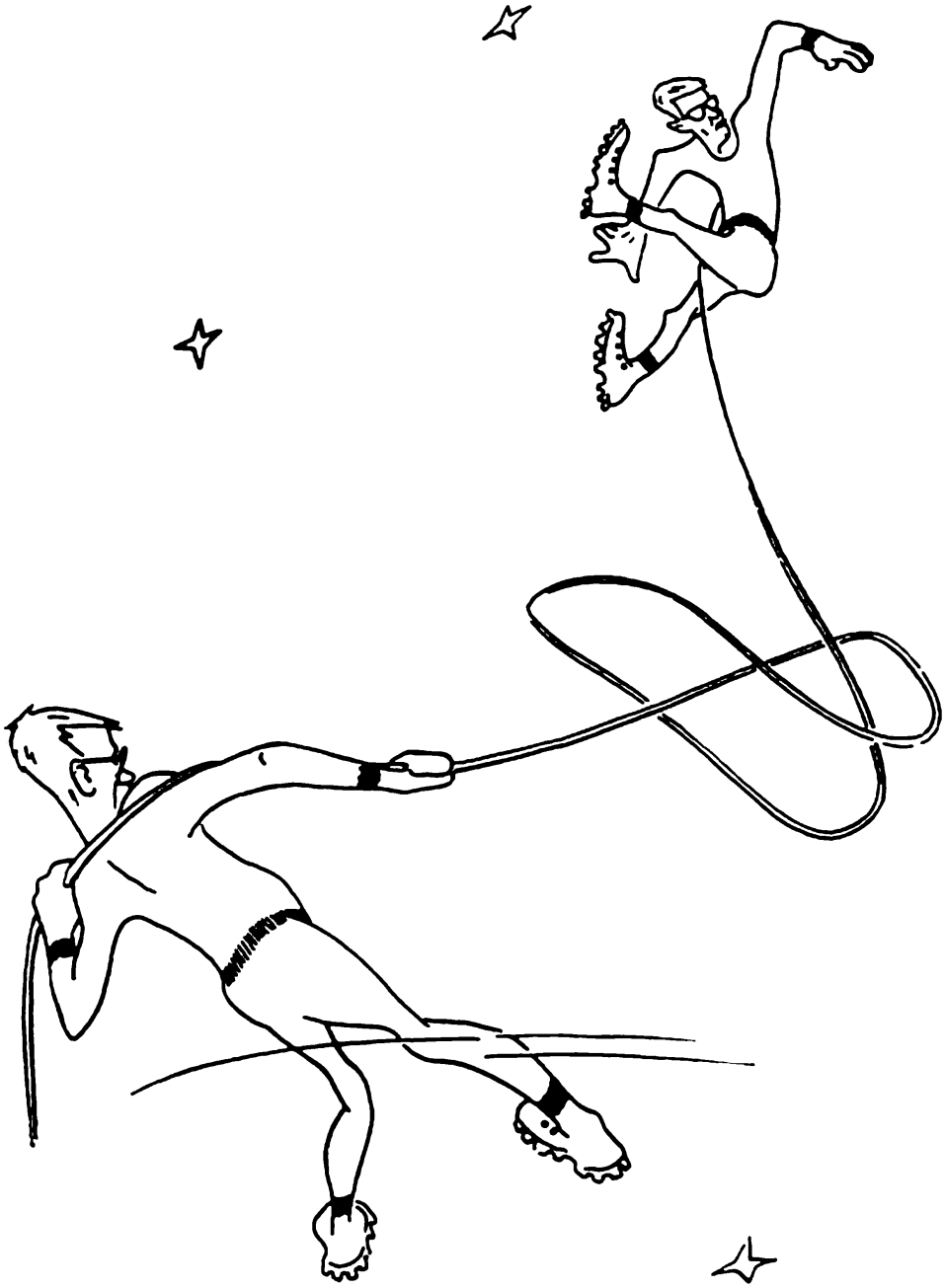
Tableau 11.2

Les mouvements qui aboutissent à la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$

	Ensemble des valeurs initiales conduisant au mouvement	Nature du mouvement
	I. Sans évolution	
Soit $2\eta_0+\xi_0'\neq 0$, soit $\lvert c_4\rvert+2\sqrt{c^{2/3}+c^{2/3}}>1$	1° $h=\varphi_0'^2-3\sin^2\varphi\geqslant 4$, $\varphi'>0$	1° Rotation suivant la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$ dans le sens inverse de la révolution
	2° $h\geqslant 0$, $\varphi'<0$	2° Rotation suivant la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$ dans le sens de la révolution
	3° $-3\leqslant h\leqslant -0{,}5$	3° Oscillations suivant la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$ autour de la position d'équilibre stable
	II. Avec évolution	
	1° Ensemble de données initiales de mesure non nulle	1° Cycle limite : oscillations suivant la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$ avec $h=-0{,}5$; le temps de transition est infini
	2° Ensemble de données initiales de mesure non nulle	2° Oscillations limites suivant la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$ pour h quelconque tel que $-1{,}85\leqslant h\leqslant -0{,}5$; le temps de transition est fini
	3° Ensemble de données initiales discret ∞^1	3° Régime périodique mixte avec abandon de la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$, $h=1$, le temps de transition est fini
	4° Ensemble de données initiales discret ∞^2	4° Ensemble discret de régimes périodiques mixtes avec abandon de la circonférence $\xi^2+\eta^2=1$, avec $h_1=-0{,}00825$, $h_2=-0{,}00215$, $h_3=-0{,}00095$, ..., $h_\infty=-0$, le temps de transition est fini

d'une analyse plus poussée. Notre but était de comprendre la portée du problème, sa place parmi les autres problèmes de mécanique du vol spatial, d'indiquer les problèmes qui peuvent se poser et de suggérer des méthodes d'analyse adéquates.

Un satellite à deux modules indépendants reliés par un câble suffisamment long est un très bon objet d'analyse. La plus anodine des questions qui attendent leur réponses est celle-ci : le câble peut-il se nouer de lui-même ?



8. Grappe de corps dans l'espace

La station orbitale peut être constituée de plusieurs modules autonomes identiques reliés par des câbles. On a alors un système à trois dimensions: par exemple, quatre modules autonomes reliés par des câbles de même longueur se trouvent aux sommets d'un tétraèdre (fig. 11.18). Une telle grappe peut-elle conserver sa forme en orbite? Ce problème, posé par E. Dévianine, a été résolu par E. Novikova. Examinons-le.

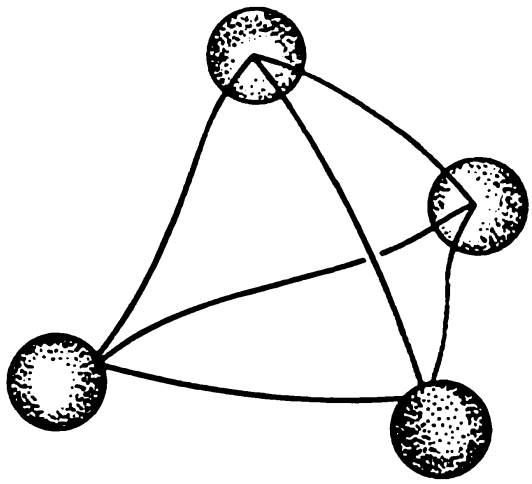


Fig. 11.18. Grappe de corps en forme de tétraèdre

Par analogie à (11.2.3), les équations du mouvement s'écrivent

$$\ddot{\rho}_i + \frac{\mu}{R^3}\rho_i - \frac{3\mu}{R^5}(\mathbf{R}\cdot\rho_i)\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}(\rho_i - \rho_j). \quad (11.8.1)$$

Ici ρ_i est le rayon vecteur de l'i-ième module de la station par rapport au centre de masse de la station, λ_{ij} le multiplicateur de Lagrange introduit par la liaison entre l'i-ième et le j-ième module. Pendant le mouvement gêné (la forme en tétraèdre étant conservée) tous les λ_{ij} doivent être strictement négatifs. Les conditions des liaisons sont

$$|\rho_i - \rho_j| \leqslant l.$$

Si la configuration subsiste, la station se met inévitablement à tourner avec une vitesse angulaire Ω constante en grandeur et en direction dans l'espace, car l'ellipsoïde d'inertie de la station « figée » est une sphère, $A = B = C$. Alors

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \Omega \times \rho_i, \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} = \Omega \times (\Omega \times \rho_i) = \Omega(\Omega\cdot\rho_i) - \rho_i\Omega^2,$$

et l'équation (11.8.1) devient

$$\Omega(\Omega\cdot\rho_i) + \left(\frac{\mu}{R^3} - \Omega^2\right)\rho_i - \frac{3\mu}{R^5}(\mathbf{R}\cdot\rho_i)\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}(\rho_i - \rho_j). \quad (11.8.2)$$

Multiplions-la scalairement par Ω. Il vient

$$\frac{\mu}{R^3}\Omega\rho_i^{\Omega} - \frac{3\mu}{R^5}(\mathbf{R}\cdot\rho_i)(\mathbf{R}\cdot\Omega) = \sum_{j=1}^{3}\lambda_{ij}(\rho_i^{\Omega} - \rho_j^{\Omega}), \quad (11.8.3)$$

où les ρ_k^Ω sont les projections des vecteurs ρ_k sur l'axe de Ω. Elles sont toutes constantes, car la station tourne à la façon d'un solide autour de l'axe de Ω. Soit $\rho_i^\Omega > 0$ la plus grande des ρ_k^Ω. On a alors $\rho_i^\Omega - \rho_j^\Omega > 0$ pour ρ_j^Ω quelconque. Puisque $\Omega = \text{Cte}$ et que $\mathbf{R}$ balaie un plan (le plan de l'orbite), il arrive un moment où $\mathbf{R}\cdot\Omega = 0$; le premier membre de (11.8.3) devient alors strictement positif, ce qui est possible si au moins un λ_{ij} l'est (car $\rho_i^\Omega - \rho_j^\Omega > 0$). Or, si λ_{ij} est strictement positif, cela signifie que le câble entre l'i-ième et le j-ième module de la station a du « mou », c'est-à-dire que la liaison cesse d'exister. Ainsi donc, la grappe de corps ne peut pas conserver indéfiniment sa forme dans l'espace.

9. Nuage de particules en orbite et théorème du retour de Poincaré

Un des problèmes remarquables de dynamique du mouvement relatif est celui d'un nuage de particules larguées d'un satellite. Quel sera le comportement du nuage dans le temps? (En 1963 les Américains ont réalisé le projet *West Ford*: la mise en orbite d'un « nuage » d'aiguilles métalliques pour les besoins des télécommunications.) La même question pourrait bien sûr se poser à propos d'une agglomération importante de satellites si une telle agglomération avait lieu.

Voici une succession de problèmes (numérotés) qui, bien que simplifiés à l'extrême, conduisent à la bonne réponse.

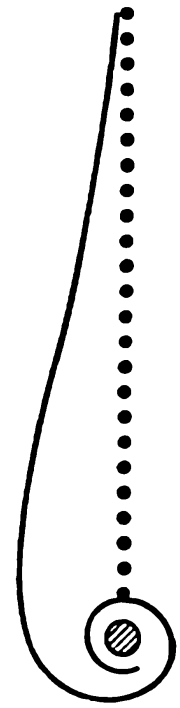


Fig. 11.19. Configuration d'un ensemble de satellites

P r o b l è m e 1. Un grand nombre de satellites sont alignés à l'instant initial suivant un rayon. Chaque satellite possède sa propre vitesse circulaire (fig. 11.19). Quelle sera la configuration de l'ensemble des satellites au bout d'un temps t?

S o l u t i o n. Considérons un satellite déterminé qui parcourt une orbite circulaire de rayon r avec un angle polaire φ qui varie suivant la loi $\varphi = \omega\,(t - t_0)$. D'après la troisième loi de Kepler $\omega = \sqrt{\mu}/r^{3/2}$. Donc, au bout d'un temps fixé $T_* = t - t_0$, la configuration du système sera régie par l'équation

$$\varphi = \frac{\sqrt{\mu}}{r^{3/2}}\,T_*,$$

d'où

$$r = \frac{c}{\varphi^{2/3}}, \quad c = \sqrt[3]{\mu T_*^2}. \tag{11.9.1}$$

Cette équation définit une spirale que l'on voit sur la même figure. Plus le temps T_* est long, plus il y a de spires entre deux valeurs fixées r_1, r_2 du rayon.

Remarquons en passant que si l'anneau $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$ était à l'origine rempli de particules à l'exception d'un vide radial ou « fente », cette « fente » aurait à chaque instant donné $t \neq t_0$ la forme d'une spirale analogue à celle de la figure 11.19. C'est ce fait élémentaire qui détermine dans une large mesure la structure spiralée des galaxies. Toute « fente » ou « saillie » (d'origines diverses) de la galaxie s'enroule inévitablement en spirale au bout d'un certain temps: c'est une conséquence inévitable des lois de Kepler.

Problème 2. Considérons deux satellites quelconques de l'ensemble introduit précédemment. Quel sera leur mouvement relatif?

Réponse. Soient r_1, ω_1 et r_2, ω_2 le rayon et la fréquence de révolution du premier et du second satellite respectivement. Leur mouvement relatif $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ se définit en coordonnées polaires ρ, φ par les formules

$$\rho = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)(t - t_0)}, \tag{11.9.2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{r_2 \sin \omega_2 (t - t_0) - r_1 \sin \omega_1 (t - t_0)}{r_2 \cos \omega_2 (t - t_0) - r_1 \cos \omega_1 (t - t_0)}. \tag{11.9.3}$$

La fonction $\rho(t)$ est périodique de période

$$T_\rho = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}. \tag{11.9.4}$$

Elle varie périodiquement entre ses valeurs maximale ($\rho_{max} = r_1 + r_2$) et minimale ($\rho_{min} = r_2 - r_1$). La période T_ρ est très grande pour des satellites de périodes T_1, T_2 sensiblement voisines.

Soit par exemple $T_2 = T_1 + T_1/n$, n grand. Alors

$$T_\rho = (n + 1) T_1. \tag{11.9.4'}$$

Or, la vitesse de variation de l'angle φ se définit par les fréquences ω_1, ω_2 et non par leur différence. La trajectoire de $\rho(\varphi)$ représente donc une spirale « à pulsations lentes » avec un grand nombre de spires. Au bout de $\frac{n+1}{2}$ révolutions (à peu près) du premier satellite, le second s'en trouvera éloigné au maximum; au bout de $n + 1$ révolutions à peu près, les satellites reviendront à leur position relative d'origine.

Problème 3. Décrire l'évolution du « nuage de satellites » pendant une période prolongée.

Position du problème et solution. Simplifions au maximum la structure du nuage en supposant que les particules suivent une série d'orbites circulaires de périodes T_i qu'on peut

ordonner ainsi :

$$T_1 = T_0, \quad T_2 = T_0 + \frac{1}{n} T_0, \quad T_3 = T_0 + \frac{2}{n} T_0, \ \ldots, \ T_{k+1} = \\ = T_0 + \frac{k}{n} T_0, \qquad (11.9.5)$$

où n est un nombre (par exemple entier) suffisamment grand et $k \geqslant n$. Chaque période T_i est propre à tout un groupe de particules, mais nous parlerons par convention d'une particule unique ayant la période donnée.

Suivons l'évolution d'un tel nuage. Il ressort du problème 1 qu'au bout d'un temps assez court le nuage se trouvera étalé dans un domaine annulaire $r_1^* \leqslant r \leqslant r_2^*$. En effet, au bout d'un temps mT_0 la première particule aura fait m révolutions et la $(k+1)$-ième particule $\frac{mT_0}{T_{k+1}} = \frac{m}{1+\frac{k}{n}}$ révolutions, si bien que la spirale décrite dans le problème 1 aura $m - \frac{m}{1+\frac{k}{n}} = \frac{m}{\frac{n}{k}+1} \approx m$ spires (si $k \gg n$).

La période d'un satellite proche de la Terre est de 1,5 h environ. Cela veut dire qu'au bout de vingt-quatre heures les particules du nuage se seront dispersées suivant une spirale à seize spires, polluant pratiquement tout l'espace autour de la Terre dans la zone annulaire $r_1^* \leqslant r \leqslant r_2^*$. Même pour $k \sim n$ la spirale aura $m/2$ spires (c'est-à-dire qu'une spirale à huit spires se sera formée en 24 h).

Voyons ce qui va suivre.

Conformément à la formule (11.9.4′) du problème 2, la position relative du premier et du deuxième satellite se renouvellera au bout d'un temps $\tilde{T}_1 = (n+1)\,T_0$; pendant ce temps le troisième satellite aura fait $T_1/T_3 = n/(n+2)$ révolutions. Pendant le temps $\tilde{T}_2 = (n+2)\,\tilde{T}_1$ la position relative des deux premiers satellites se renouvellera $n+2$ fois, et le troisième satellite aura fait n révolutions, si bien que la configuration initiale des trois premiers satellites se trouve répétée pour la première fois. En poursuivant ce raisonnement on finit par s'assurer qu'au bout d'un temps

$$\tilde{T}_k = (n+1)\,(n+2)\,\ldots\,(n+k)\,T_0 \qquad (11.9.6)$$

la configuration initiale de tous les $k+1$ satellites se renouvellera, si bien que le nuage reprendra sa forme originale !

Or, le temps $\tilde{T}_k$ est extrêmement grand. En effet,

$$\tilde{T}_k > n^{k-1}\tilde{T}_1 > 2^{k-1}\tilde{T}_1. \qquad (11.9.7)$$

Supposons que la position relative des deux premiers satellites se répète au bout d'un tesps $\tilde{T}_1 = 1$ jour (nous avons pris à dessein

une valeur très petite, qui correspond à $n = 15$). Alors, un nuage constitué seulement de 102 particules n'aura repris sa configuration initiale qu'au bout d'un temps nettement supérieur à 2^{100} jours, ou à 10^{30} jours. A titre de référence, le temps d'existence du système solaire n'est que de 10^{12} ou 10^{13} jours.

Ce problème n'est qu'une pâle réplique d'un remarquable théorème de dynamique, dit *théorème du retour de Poincaré*. Il s'énonce ainsi. Supposons que le mouvement soit a) conservatif, b) borné en variables de phases. Alors pour la plupart des états initiaux, le système revient, au bout d'un temps suffisamment long, à un état aussi proche que l'on veut de l'état initial.

Ainsi donc, le théorème de Poincaré démontre pour un cas très général le retour du système à un état aussi proche que l'on veut de l'état initial. Par exemple, dans le problème considéré ci-dessus le retour ne dépend absolument pas de l'ordre concret (11.9.5) des particules; il reste tout aussi probable quand les particules éprouvent l'influence des différents facteurs perturbateurs (à condition que ceux-ci soient conservatifs!), quand les particules sont en interaction conservative, et ainsi de suite. Il faut seulement que le mouvement soit conservatif et, bien sûr, que l'espace de phases soit borné (ce qui a sombré dans l'infini est perdu à jamais...).

Le théorème du retour de Poincaré « est l'une des rares conclusions générales que l'on puisse tirer sur le caractère du mouvement bien que personne n'en connaisse les détails, même dans les cas les plus simples » (par exemple dans un problème non intégrable à deux dimensions. — *V.B.*) ([11.6]).

Ce théorème admet une foule d'applications, parfois assez inattendues. Voici un fait paradoxal tiré du livre [11.6] d'Arnold: « Si l'on abat la cloison étanche séparant en deux une chambre dans l'une des moitiés de laquelle on a fait le vide, on constate qu'au bout d'un temps assez long l'air se concentre dans l'une des moitiés de la chambre. ... Mais ce « temps assez long » est comparable à l'âge de l'Univers. »

Nous donnerons l'énoncé et la démonstration du théorème de Poincaré d'après l'excellent livre de V. Arnold [11.6].

Considérons les équations de Hamilton (2.4.4) pour le cas général où $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit un espace de dimension $2n$, aux coordonnées p_i, q_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, dit *espace de phases*.

Définition. On appelle *flot de phases* un groupe de transformations à un paramètre de l'espace de phases

$$g^t: \quad (p_i(0), q_i(0)) \to (p_i(t), q_i(t)), \tag{11.9.8}$$

où $p_i(t)$, $q_i(t)$ est solution du système d'équations de Hamilton.

Théorème de Liouville. Le flot de phases conserve le volume: pour tout domaine D on a (fig. 11.20)

$$\textit{volume de } g^t D = \textit{volume de } D.$$

Nous omettons la démonstration (on la trouve par exemple dans [11.6]).

Théorème du retour de Poincaré. *Soit g une bijection continue conservant le volume, qui applique un domaine borné D de l'espace euclidien sur lui-même:*

$$gD = D.$$

Il existe alors dans un voisinage quelconque Δ *de tout point de D un point* $x \in \Delta$ *qui retourne à* Δ, *si bien que*

$$g^n x \in \Delta$$

pour un $n > 0$.

D é m o n s t r a t i o n. Considérons (fig. 11.21) les images du voisinage Δ: Δ, $g\Delta$, $g^2\Delta$, . . ., $g^n\Delta$, . . . Elles ont toutes un même volume strictement positif. Si elles étaient disjointes, le volume de D serait infini. Il existe donc des $k \geqslant 0$ et $l \geqslant 0$ $(k > l)$ tels que l'intersection de $g^k \Delta > 0$ et $g^l \Delta > 0$ soit non vide:

$$g^k\Delta \cap g^l\Delta \neq 0.$$

Par suite $g^{k-l}\Delta \cap \Delta \neq 0$. Soit $g^{k-l}x = y$, $x \in \Delta$, $y \in \Delta$. Alors $x \in \Delta$, $g^n x \in \Delta$ $(n = k - l)$, ce qu'il fallait démontrer.

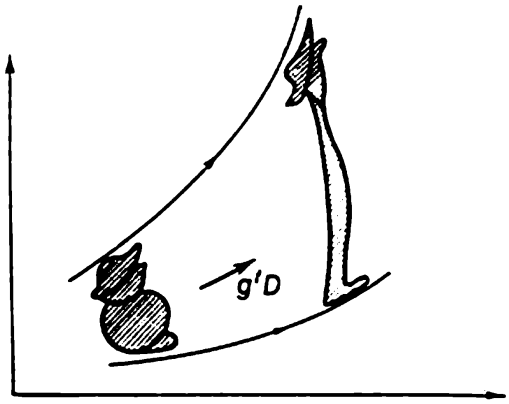


Fig. 11.20. Pour la c nservation du volume de phases

Le théorème de Poincaré a un caractère éminemment abstrait. Ses applications en mécanique sont dues au fait que l'application g se laisse mettre sous la forme (11.9.8) (qui vérifie les conditions du théorème de Poincaré en vertu du théorème de Liouville). Parmi les conditions du théorème de Poincaré, la plus essentielle est que le domaine D de l'espace de phases du mouvement soit *borné* (et appliqué sur lui-même). Dans les systèmes à une dimension (tels que le pendule simple), cette condition est vérifiée par les domaines « contenus à l'intérieur » des séparatrices; dans les systèmes à deux dimensions avec un potentiel croissant à l'infini $V = -U$, par les domaines « contenus à l'intérieur » d'un niveau d'énergie fixé $T + V \leqslant h$, et ainsi de suite.

P r o b l è m e. Dans [11.7] et dans leurs autres travaux, N. Kozlov, R. Suniaiev et T. Eneiev proposent un modèle de l'interaction des galaxies. Une multitude de particules non attractives formant nuage se déplacent avec des vitesses circulaires initiales par rapport à une masse m_0 (le « noyau de la galaxie »); chaque particule est attirée par m_0 d'après la loi de Newton. Suivant cette même loi, les

particules du nuage sont attirées par une autre masse m_1 (la « masse perturbatrice »). Les masses m_0 et m_1 s'attirent réciproquement d'après la loi newtonienne et la masse m_1 parcourt, suivant les lois de Kepler, une orbite hyperbolique par rapport à m_0.

Un tel système vérifie-t-il les conditions du théorème du retour de Poincaré?

Réponse. Non.

Car le mouvement de m_1 est non borné. On ne peut donc affirmer avec certitude que la galaxie reviendra un jour à l'état initial et que toutes ses particules tourneront sur orbites circulaires autour de m_0.

Les calculs effectués par N. Kozlov, R. Suniaiev et T. Eneiev montrent que la masse perturbatrice m_1 peut « piéger » et entraîner

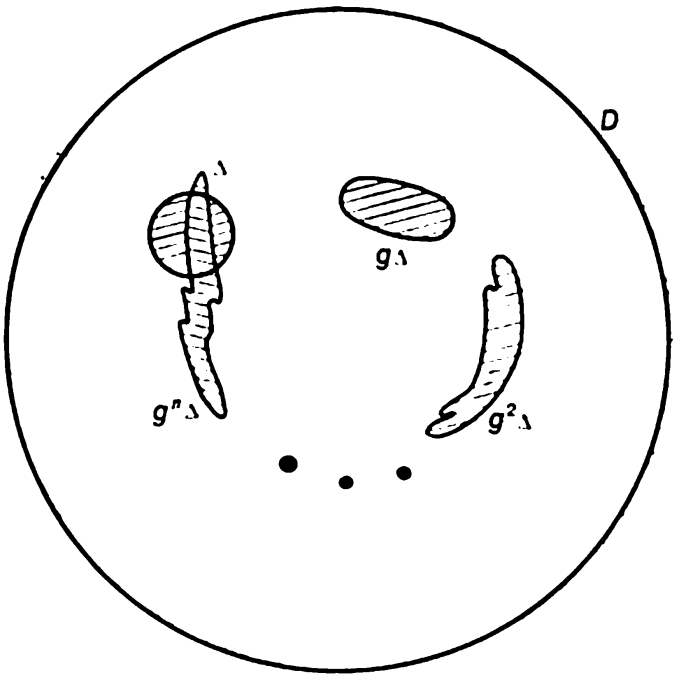


Fig. 11.21. Pour la démonstration du théorème de Poincaré

derrière elle une certaine fraction des particules; d'autres particules se voient communiquer des vitesses hyperboliques par rapport aux deux masses m_0, m_1 et sont « éjectées » hors de la galaxie. Les particules restées au voisinage de m_0 ont des vitesses elliptiques par rapport à m_0, et le nuage lui-même se transforme sensiblement en prenant une forme fortement spiralée.

A cet instant précis, proposons-nous de séparer le nuage *resté* au voisinage de m_0 d'avec la masse disparue m_1: supposons que m_1 cesse complètement d'attirer les particules du nuage. Nous obtenons ainsi un nouveau problème *initial*: une masse m_0 est entourée par

un nuage spiral de particules qui sont attirées par m_0 mais ne s'attirent pas les unes les autres et qui ont *toutes* des vitesses *elliptiques* par rapport à m_0. Maintenant *le système vérifie les conditions du théorème de Poincaré*. On peut affirmer que, quelles que soient les déformations successives subies par une telle « galaxie », elle finira par revenir un jour à sa structure *spirale* de départ !

Rappelons cependant que le temps nécessaire à un tel retour est nettement supérieur à la durée de vie d'une galaxie.

DOUZIÈME ESSAI

MOULINET SPATIAL

— Prenez donc garde, mon seigneur, répliqua Sancho Pança ; ce que nous voyons là-bas ne sont pas des géants, mais des moulins à vent.

Cervantès
Don Quichotte

1. Satellites *Proton*

Dans le sixième essai nous avons évoqué les effets remarquables que l'on observe dans le mouvement du satellite autour de son propre centre de masse, dans l'évolution de la rotation et de l'orientation du satellite. Provoqués par l'action du champ gravitationnel, ce sont cependant des phénomènes plus ou moins communs aux corps célestes naturels et artificiels.

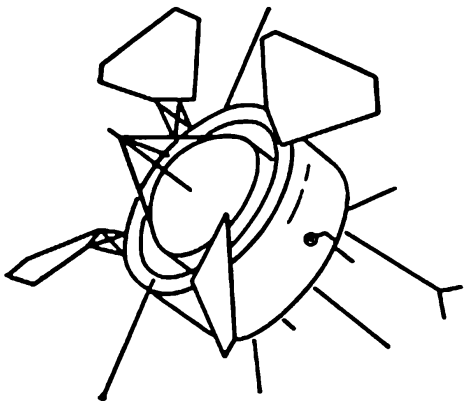


Fig. 12.1. Vue d'aspect d'un satellite *Proton*

Le satellite artificiel éprouve en même temps l'action de nombreuses autres forces, aérodynamiques par exemple. Il se déplace dans les couches hautes fortement raréfiées de l'atmosphère terrestre, où l'influence systématique, bien que faible, des forces aérodynamiques risque de provoquer (et provoque, effectivement) une évolution lente tant de l'orbite que de la rotation propre du satellite.

Puisque les profils des satellites sont très variés, quelquefois « exotiques », et que les propriétés aérodynamiques dépendent essentiellement du profil, les moments des forces aérodynamiques conduisent parfois à une évolution « fantaisiste » de l'orientation du satellite.

En 1965-1968, une série de satellites lourds *Proton*, les plus lourds de tous les satellites scientifiques, a été lancée en Union Soviétique. Ce qui les distingue, c'est qu'ils sont dotés de piles solaires sous forme de larges aubes disposées en symétrie oblique par rapport aux axes du satellite (fig. 12.1).

Pendant son mouvement en orbite le satellite rencontre un courant contraire de milieu raréfié. Ce fluide, tombant sur les aubes

des piles solaires, met le satellite en rotation, un peu comme le vent fait tourner un moulinet d'enfant ou un moulin à vent, à ceci près que, solidaire de ses aubes, le satellite commence à tourner lui-même. Cela fait naître toute une série de phénomènes originaux dans l'évolution de la rotation et de l'orientation des *Proton*.

2. Comment on l'a découvert

Ces phénomènes ont été découverts pendant l'analyse des données expérimentales sur la rotation et l'orientation du satellite *Proton*-2.

Nous avions promis, dans le sixième essai, d'expliquer ce qu'est la détermination expérimentale de l'attitude d'un spoutnik. Il est temps de tenir notre promesse.

En effet, on ne sait rien d'avance, le plus souvent, sur l'attitude du satellite et ses variations ultérieures. (Il s'agit d'un satellite dépourvu d'un système d'orientation approprié.) Or, il est nécessaire de connaître son attitude, sans quoi on n'arrive pas à interpréter correctement les indications des instruments scientifiques installés à bord. N'oublions pas que les instruments scientifiques ont pour mission de mesurer les caractéristiques physiques de l'espace proche de la Terre ou interplanétaire ; le lancement de chaque nouveau satellite marque une nouvelle étape de la connaissance de la nature. Mais comment peut-on parler de connaissance si l'on ne comprend pas ce que disent les instruments ! Il faut donc savoir à chaque instant où « regarde » tel instrument, c'est-à-dire connaître l'orientation du satellite dans l'espace. A cet effet, on munit le satellite de détecteurs d'attitude. Les indications des détecteurs sont transmises à la Terre. Le détecteur solaire par exemple, annonce si sa fenêtre d'admission est éclairée ou non ; le détecteur magnétique indique la position actuelle de la ligne de force du champ magnétique de la Terre par rapport au corps du satellite, et ainsi de suite. On demande de reconstituer l'attitude du satellite compte tenu de ces données.

Or, le malheur est que, premièrement, les indications des détecteurs sont échelonnées généralement dans le temps, si bien qu'à chaque instant on ne dispose que de l'indication d'un seul détecteur et qu'à certains instants on n'a aucune indication.

Le malheur est que, deuxièmement, tout détecteur se trompe toujours un peu : ses indications sont inévitablement entachées d'erreurs, généralement petites d'ailleurs (et c'est encore heureux...). En effet, le détecteur n'est qu'un instrument comme les autres, et son fonctionnement est extrêmement sujet aux brouillages qui faussent tant la transmission de ses données que leur lecture au sol ; ce qu'on tient en mains n'est donc pas tout à fait (voire tout à fait pas) ce que le détecteur voulait dire.

Le malheur est que, troisièmement, on ignore tout à priori sur

le mouvement du satellite autour de son centre de masse, même approximativement : il n'y a donc aucun point de départ pour l'analyse.

Le malheur est que, quatrièmement, nous connaissons encore mal les forces et les moments exercés sur le satellite dans chaque cas concret, ce qui ne permet pas de calculer avec certitude, dans bien des cas, l'évolution de l'attitude du satellite.

Le malheur est que, cinquièmement, le mouvement du satellite et les indications des détecteurs se combinent parfois de telle façon que l'on se trouve incapable de comprendre quoi que ce soit sur le mouvement...

Une avalanche de malheurs en somme, mais il faut travailler.

La restitution de l'attitude exige naturellement un dépouillement mathématique minutieux des résultats des mesures. On se donne toujours un *modèle du mouvement* du satellite autour de son centre de masse, afin de pouvoir réunir les indications disparates des détecteurs dans le cadre d'une « trajectoire » unique. On choisit un *algorithme statistique de traitement de l'information* qui permet d'exploiter de la « meilleure façon » les indications des détecteurs avec leurs erreurs aléatoires, d'atténuer ces erreurs et de dégager une trajectoire « moyenne » qui traduit mieux que les autres ce que les détecteurs ont « voulu dire ». Si nécessaire, on procède parallèlement au recensement des facteurs perturbateurs. Par exemple on calcule les moments des forces exercées sur le satellite.

Supposons que le mouvement autour du centre de masse soit défini par un vecteur

$$\mathbf{r}\,(\mathbf{a},\ t) \tag{12.2.1}$$

qui détermine précisément le modèle du mouvement. Ensuite, supposons que le mouvement soit complètement défini par la donnée d'une famille de paramètres constants $\mathbf{a}\ (a_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Le modèle du mouvement peut ainsi être représenté par la solution des équations différentielles du mouvement. Supposons, enfin, que les moments des forces intervenant dans ces équations soient écrits sous forme explicite mais contiennent des paramètres constants que l'on ne connaît pas exactement. Sous ces hypothèses, a_i sont les données initiales pour l'intégration des équations et les paramètres constants dans l'expression des moments des forces.

Supposons qu'en faisant des mesures à bord du satellite à des instants t_n $(n = 1, 2, \ldots, N\,;\ m < N)$, on ait obtenu des quantités ψ_n. On connaît l'influence de l'orientation du satellite sur ψ_n, si bien qu'on peut calculer sa valeur théorique $\tilde{\psi}_n = \tilde{\psi}_n\ \{\mathbf{r}\ (\mathbf{a},\ t_n),\ t_n\}$. Ecrivons les différences $\xi_n = \tilde{\psi}_n - \psi_n$ entre les valeurs théorique et mesurée de la fonction ψ. Il s'agit de déterminer les paramètres incon-

nus a de façon à minimiser l'ensemble des différences ξ_n, auquel cas la fonction considérée $\tilde{\psi}(t)$ correspondra « en moyenne » aux valeurs mesurées ψ_n. En statistique mathématique, on utilise à cet effet, par exemple, la *méthode des moindres carrés*, qui consiste à minimiser en a la somme

$$\Phi = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sigma_n^2} \xi_n^2, \tag{12.2.2}$$

dans laquelle $1/\sigma_n^2$ sont des coefficients de pondération qui dépendent de la nature des erreurs aléatoires entachant les valeurs mesurées ψ_n. Les conditions nécessaires du minimum de Φ

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_m} = 0 \tag{12.2.3}$$

conduisent à m équations pour m paramètres inconnus $a_1, \ldots, a_m$.

Il n'est déjà pas aisé de résoudre le système d'équations (12.2.3) par rapport à a_i. On utilise généralement la méthode des approximations successives. A cet effet, on doit connaître les valeurs des paramètres a_i en approximation initiale ou « zéro ». L'approximation zéro ne peut avoir d'autre source que l'information sur l'attitude du satellite, c'est-à-dire les valeurs mesurées ψ_n elles-mêmes; l'algorithme de détermination doit comprendre donc, à titre de partie constitutive indispensable, un algorithme particulier de recherche de l'approximation zéro. Cette vaste tâche ne peut être résolue autrement qu'avec un ordinateur.

Il existe aujourd'hui tout un chapitre de la théorie des mouvements des satellites artificiels consacré au dépouillement mathématique des mesures en orbite pour la détermination de la trajectoire réelle et des facteurs perturbateurs en jeu [12.1]. Une des premières recherches effectuées dans ce sens est due à T. Eneiev, A. Platonov et R. Kazakova [12.10]. De nombreux auteurs décrivent la détermination de la densité de la haute atmosphère de la Terre et des harmoniques du potentiel de la gravitation terrestre d'après les mesures en orbite. E. Akim a décrit pour la première fois la détermination des harmoniques du potentiel de la gravitation lunaire d'après les observations du mouvement d'un satellite artificiel de la Lune [12.2].

Le problème de la détermination de l'attitude des satellites d'après les données des observations est sensiblement similaire à celui de la détermination des orbites et relève de méthodes analogues, bien qu'il présente en même temps un caractère spécifique et des difficultés particulières. La première fois, ce fut pour le troisième spoutnik soviétique que l'attitude a été déterminée d'après les résultats des mesures prises à bord [12.3]. Pour les satellites *Proton*, la méthode utilisée et les résultats de la détermination de l'attitude ont été

décrits dans [12.4], ainsi que dans une série d'articles, par exemple dans [12.5-12.9] *).

Signalons quelques effets dynamiques intéressants dans l'évolution de l'attitude d'un satellite *Proton*.

3. Ce qu'on a découvert

La figure 12.2 donne le tableau expérimental [12.4, 12.8] de l'évolution dans le temps de deux paramètres de rotation et d'orientation du satellite *Proton*-2. La signification du premier paramètre —

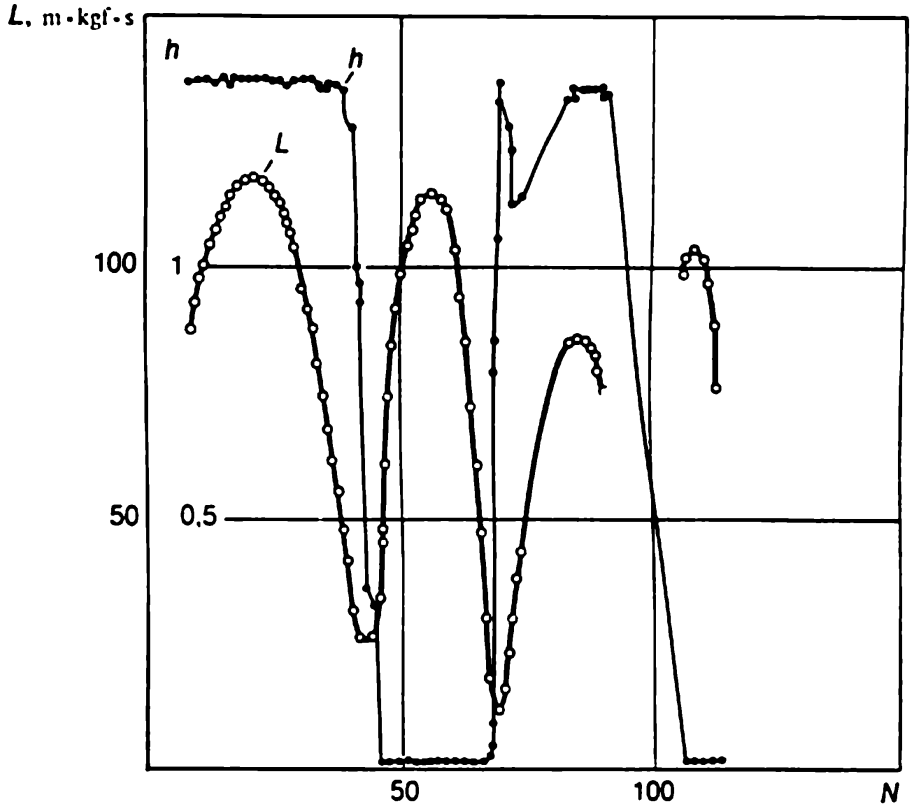


Fig. 12.2. Evolution des paramètres de rotation et d'orientation du satellite *Proton-2*

module L du vecteur moment cinétique — a déjà été expliquée dans le sixième essai. Examinons l'autre paramètre:

$$h^2 = \sin^2 \vartheta \, (1 + \varepsilon \sin^2 \varphi), \qquad (12.3.1)$$

$$\varepsilon = \frac{B-A}{C-B} \frac{C}{A}.$$

*) Au cours de ces recherches, l'auteur a eu la chance de travailler en coopération avec une équipe de chercheurs: Iou. Zonov (détermination de l'attitude du troisième spoutnik) [12.3], V. Goloubkov et I. Khatskévitch (mise au point d'une série de méthodes automatisées, détermination de l'attitude des satellites *Proton* et d'autres satellites) [12.3-12.8], E. Lavrovski et S. Trouchine (détermination de l'attitude des satellites *Elektron*) [12.5].

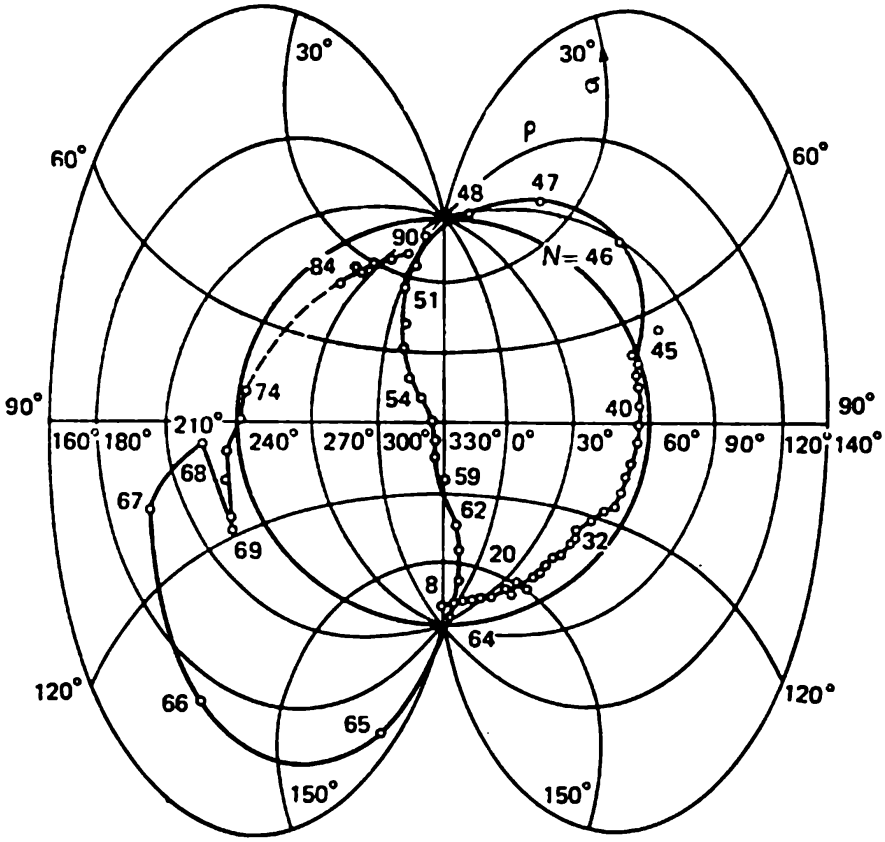


Fig. 12.3. Trace du vecteur moment cinétique du satellite *Proton-2* sur la sphère céleste (les chiffres affectant la courbe marquent les révolutions successives du satellite). Les points $\rho = 0°$, $\rho = 180°$ correspondent aux pôles Nord et Sud du monde respectivement

Ici A, B, C sont les moments d'inertie centraux principaux du satellite ($C > B > A$), ϑ l'angle déjà connu entre l'axe longitudinal du satellite (axe du moment d'inertie C) et le vecteur moment cinétique **L**, et φ l'angle de rotation propre égal à l'angle de rotation du satellite autour de son axe longitudinal. En l'absence des moments de forces extérieures le mouvement est non perturbé, et la grandeur h pour un satellite triaxial reste constante, de même que L. Les valeurs $h \sim 0$ correspondent alors à la rotation autour de l'axe longitudinal du satellite ($\vartheta = 0$ ou $\vartheta = \pi$), et les valeurs $h \sim \sim 1 + \varepsilon$, à sa rotation au voisinage de l'axe transversal. Pour un satellite dynamiquement symétrique ($B - A = 0$) la variation de h de 0 à 1 signifie simplement que le satellite passe de la rotation « longitudinale » ($\vartheta = 0$) à la rotation « transversale », ou « culbutage » ($\vartheta = \pi/2$) ; ainsi donc, la variation de h coïncide qualitativement avec celle de l'angle ϑ.

D'après ce que nous avons vu dans le sixième essai, il est clair que, pour un satellite qui tourne rapidement dans un champ gravitationnel, L et h sont constants tous les deux. Ces grandeurs sont

insensibles à l'action de nombreuses perturbations. En présence des forces dissipatives, L et h varient de façon monotone ; pour plus de détails, voir notre ouvrage [12.11].

Il n'empêche que la figure 12.2 fait état d'un tableau vraiment insolite de variation des paramètres L et h : ces deux grandeurs oscillent avec une période considérablement prolongée et une amplitude assez grande. La valeur de L change d'un facteur 5, et la variation de h permet de voir que le satellite en orbite passe de la rotation longitudinale au culbutage, et vice versa. Le mode de rotation évolue bien sûr assez lentement : la période est de 55 à 57 révolutions (les chiffres marqués en abscisses sur la figure 12.2 sont les numéros successifs des révolutions). La grandeur L varie avec une période deux fois plus courte ; sa valeur est maximale (ce qui correspond au maximum de la vitesse angulaire) quand le satellite tourne autour de son axe longitudinal, elle devient minimale pendant la transition de la rotation longitudinale au culbutage, puis redevient maximale quand le régime de culbutage est atteint, etc.

Il faut dire que la position du vecteur moment cinétique dans l'espace varie très fortement elle aussi : l'envergure de ses oscillations atteint les 180°. On voit sur la figure 12.3 la trace du vecteur moment cinétique du satellite *Proton*-2 sur la sphère céleste au cours des 90 premières révolutions en orbite ; on remarque que, pendant cette période, l'extrémité du vecteur a traversé deux fois le voisinage de chacun des deux pôles du monde.

4. Comment l'expliquer

Toutes ces modulations des grandeurs au comportement tranquille trouvent leur explication dans l'*effet d'hélice* : l'action du courant contraire sur les plans des piles solaires disposés en symétrie oblique. Point n'est besoin d'établir ici une théorie rigoureuse des effets, car ceux-ci sont tellement « grossiers » qu'ils se manifestent déjà dans des problèmes modèles judicieusement posés. Supposons que le satellite soit un solide dynamiquement symétrique, que les droites joignant les centres des aubes opposées passent par le centre de masse du satellite et que le corps du satellite — à l'exception des aubes — ne procure aucun moment aérodynamique ; ces conditions se trouvent réunies par exemple quand le satellite est une sphère dont le centre coïncide avec le centre de masse.

Ceci posé, le seul moment aérodynamique en action est le moment d'hélice. Nous allons le définir à partir d'un raisonnement simplifié (un raisonnement plus rigoureux [12.4, 12.9] conduit à un résultat similaire).

Supposons que l'axe longitudinal du satellite se confonde avec la direction de la vitesse V du centre de masse du satellite. Les « aubes du moulin » créent alors un moment moteur constant qui fait tour-

ner le satellite autour de son axe longitudinal (le moulinet se met à tourner quand on souffle dessus). Comme il se doit en aérodynamique, ce moment est proportionnel à la pression cinétique ρV^2, où ρ est la masse volumique de l'air et V la vitesse du courant contraire. Ainsi donc, le moment d'hélice est $m = a_0 \rho V^2$; la constante a_0 a pour dimension m^3 (produit de l'aire par le « bras de levier »).

Il est logique qu'en faisant dévier l'axe du satellite de la direction du courant, le moment d'hélice diminue; il s'annule lorsque l'axe du satellite devient normal au vecteur vitesse (le moulinet ne tourne pas quand on souffle de côté). Si l'axe du satellite est orienté exactement à l'opposé de la vitesse, le moment reprend sa valeur maximale $a_0 \rho V^2$ mais avec le signe contraire, car la rotation du satellite se produira en sens inverse (à partir de l'état de repos) par rapport à la direction positive fixée de l'axe longitudinal. Le comportement de la composante longitudinale du moment, qui varie en fonction de la position de l'axe par rapport au vecteur **V**, se décrit de la façon la plus simple par la formule approchée

$$M_{Oz} = \rho V^2 a_0 \alpha'', \tag{12.4.1}$$

dans laquelle $\alpha'' = \cos(\widehat{Oz, \mathbf{V}})$ est le cosinus de l'angle formé par l'axe longitudinal Oz du satellite et la vitesse **V** de son centre de masse. Dans le texte qui suit, nous utiliserons partout cette formule.

Dirigeons les deux autres axes Ox, Oy du satellite suivant les droites qui joignent les centres des aubes opposées. Les contributions de ces axes sont analogues à celle de Oz, à ceci près qu'on a deux aubes en action au lieu de quatre (un a_0 différent) et que les aubes sont orientées d'une autre façon (le moment est de signe contraire). Les composantes du moment suivant les axes Ox, Oy s'écriront donc

$$M_{Ox} = -\rho V^2 a_1 \alpha, \quad M_{Oy} = -\rho V^2 a_1 \alpha', \tag{12.4.2}$$

où $\alpha = \cos(\widehat{Ox, \mathbf{V}})$, $\alpha' = \cos(\widehat{Oy, \mathbf{V}})$. Si les aubes sont calées à 45° sur l'axe longitudinal (comme sur les satellites *Proton*), on a $a_1 = \frac{1}{2} a_0$ (car, des quatre aubes d'égale « aire efficace » *), deux seulement sont en action). Si les angles de calage des aubes sont différents, le rapport a_1/a_0 change en raison de la différence des « aires efficaces » mais l'on a toujours

$$a_1 < a_0. \tag{12.4.3}$$

Le problème ainsi posé revient donc à suivre l'évolution de la rotation rapide d'un satellite dynamiquement symétrique sous l'action des moments (12.4.1), (12.4.2). On peut examiner cette évolution en introduisant, comme dans le sixième essai, les variables L,

*) Aire de la projection de l'aube sur le plan normal à l'axe considéré.

ρ, σ (le module du vecteur moment cinétique et deux angles définissant sa position par rapport au plan de l'orbite) et ϑ (l'angle entre le vecteur moment cinétique et l'axe longitudinal du satellite). Or, il est plus commode de remplacer ρ et σ par l'angle θ entre le vecteur moment cinétique $\mathbf{L}$ et la direction de la vitesse $\mathbf{V}_\pi$ au périgée de l'orbite, et l'angle λ de rotation de $\mathbf{L}$ autour de $\mathbf{V}_\pi$ mesuré à partir du rayon vecteur du périgée de l'orbite (fig. 12.4).

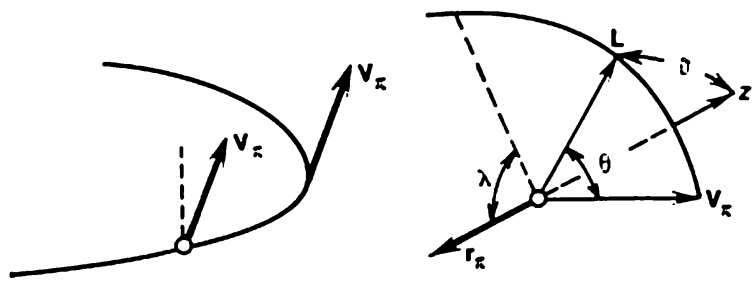


Fig. 12.4. Variables définissant la position du satellite et son moment cinétique

Ecrivons les équations d'évolution et faisons comme d'ordinaire le passage à la moyenne suivant la variable rapide (l'angle de précession ψ). Nous obtenons un système d'équations d'évolution [12.4]:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{d\nu} &= -\frac{\rho_\pi\sqrt{\mu P}}{L}\left[a_1-(a_0+a_1)\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]V_2\frac{\sin\lambda}{\sin\theta},\\
\frac{d\theta}{d\nu} &= \frac{\rho_\pi\sqrt{\mu P}}{L}\left[a_1-(a_0+a_1)\frac{1}{2}\sin^2\vartheta\right]\times\\
&\qquad\times(V_1\sin\theta+V_2\cos\theta\cos\lambda),\\
\frac{dL}{d\nu} &= \rho_\pi\sqrt{\mu P}\,[-a_1+(a_0+a_1)\cos^2\vartheta]\times\\
&\qquad\times(V_1\cos\theta-V_2\sin\theta\cos\lambda),\\
\frac{d\vartheta}{d\nu} &= \frac{\rho_\pi\sqrt{\mu P}}{L}(a_0+a_1)\sin\vartheta\cos\vartheta\times\\
&\qquad\times(V_1\cos\theta-V_2\sin\theta\cos\lambda).
\end{aligned}\right\}\quad(12.4.4)$$

Nous avons pris comme variable indépendante l'anomalie vraie ν au lieu du temps. Comme toujours μ est la constante de gravitation, P le demi-paramètre focal de l'orbite; de plus ρ_π est la densité de l'atmosphère au périgée de l'orbite. Soit $\bar\rho=\rho/\rho_\pi$; les fonctions V_1, V_2 se laissent mettre alors sous la forme

$$V_1=\bar\rho(\tilde h)\,\frac{(e+\cos\nu)\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}}{(1+e\cos\nu)^2},$$

$$V_2=\bar\rho(\tilde h)\,\frac{\sin\nu\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}}{(1+e\cos\nu)^2},$$

$$\tilde h=\frac{Pe}{1+e}\,\frac{1-\cos\nu}{1+e\cos\nu},$$

où e est l'excentricité de l'orbite et $\tilde{h}$ l'altitude du satellite au-dessus du périgée de l'orbite. Nous n'aurons d'ailleurs aucun besoin de connaître explicitement les fonctions V_1, V_2 périodiques en ν; remarquons seulement que les seconds membres des équations (12.4.4) dépendent explicitement du « temps » ν, ce qui ne facilite sûrement pas les choses, vu que ces équations sont déjà en elles-mêmes suffisamment compliquées. En effet, les équations d'évolution (12.4.4) définissant l'influence de l'effet d'hélice sur le satellite se prêtent beaucoup plus difficilement à l'analyse que les équations d'évolution dans le champ gravitationnel (sixième essai), car on a ici quatre équations par rapport aux angles d'orientation du vecteur moment cinétique au lieu de deux. Les deux équations additionnelles décrivent la variation du module L du vecteur moment cinétique et de l'angle ϑ que fait ce vecteur avec l'axe longitudinal du satellite.

Il est d'autant plus agréable que des équations aussi compliquées, présentant des fonctions explicites du temps dans leurs seconds membres, admettent deux intégrales premières exactes. Cela permet de faire une analyse qualitative efficace du comportement de la solution des équations d'évolution. Voici ces intégrales premières:

$$L \sin \vartheta \, |\operatorname{cotg} \vartheta|^{\alpha} = l, \qquad \alpha = \frac{a_1}{a_0 + a_1} < \frac{1}{2}, \quad (12.4.5)$$

$$|\operatorname{tg} \vartheta|^{2\alpha} \, |\cos \vartheta| \cos^2 \rho = c_\rho, \quad \cos \delta = -\sin \theta \sin \lambda. \quad (12.4.6)$$

Ici ρ est l'angle entre **L** et la normale au plan de l'orbite.

Les courbes intégrales (12.4.5), (12.4.6) sont montrées sur la figure 12.5, *a*, *b*. En mouvement réel ces courbes ne seront pas toujours parcourues dans leur totalité. Puisque les seconds membres des équations différentielles (12.4.4) sont explicitement périodiques en ν de période 2π, leur solution doit contenir, elle aussi, une composante périodique de période similaire. Il en résulte que le point représentatif oscille dans les plans ρ, $\cos \vartheta$ et L, $\cos \vartheta$ (fig. 12.5) le long de la courbe intégrale (12.4.5) et respectivement (12.4.6) avec une période approximativement égale à la période de révolution T_ν du satellite. Ces oscillations sont de très faible amplitude: pendant la période T_ν, elles ne couvrent qu'une portion très limitée de la courbe intégrale.

Si l'orbite est *circulaire*, l'« avancement » du point représentatif le long de la courbe intégrale pendant la première demi-orbite du satellite est compensé par un « recul » de la même valeur pendant la seconde demi-orbite, si bien que le point représentatif oscille autour de sa position moyenne fixe. Autrement dit, les variables L, ρ, ϑ oscillent (avec une faible amplitude) autour de leurs valeurs initiales en restant inchangées en moyenne. Ce phénomène est facile à expliquer du point de vue physique: tous les points de l'orbi-

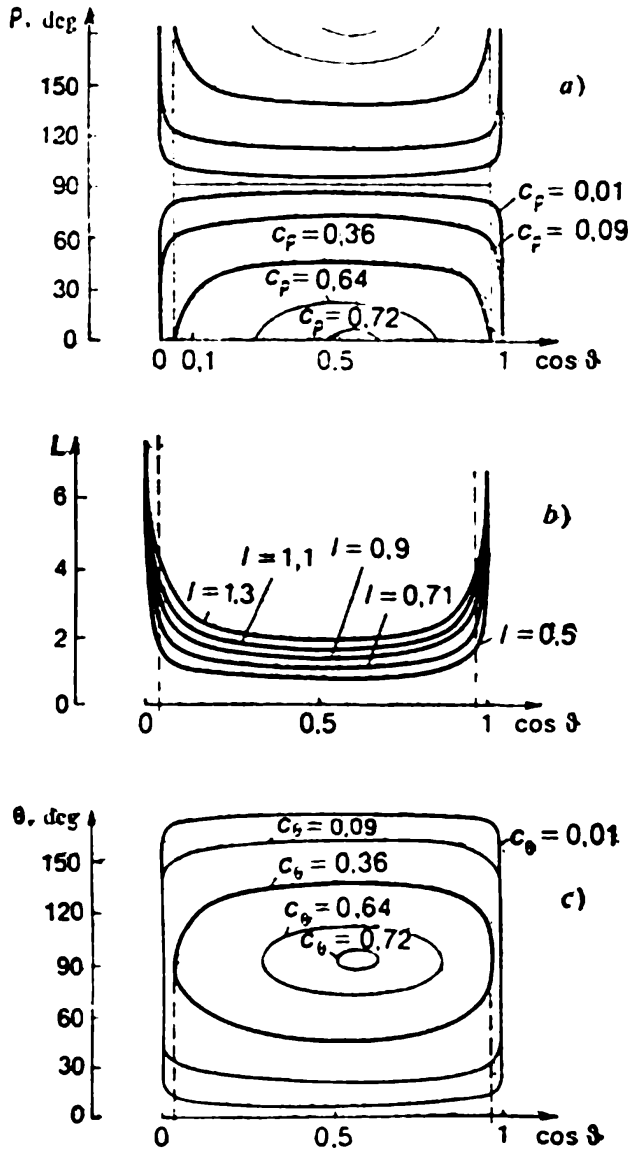


Fig. 12.5. Courbes intégrales

te circulaire se trouvant dans les mêmes conditions, la pression cinétique est la même en tout point, si bien que toute perturbation du mouvement se trouve compensée au point diamétralement opposé de l'orbite. En effet, le vecteur moment cinétique conserve sa direction dans l'espace pendant la révolution du satellite, ce qui signifie que sa direction par rapport au courant contraire change. La différence entre ces directions relatives atteint son maximum précisément à des points diamétralement opposés de l'orbite circulaire. Pour ainsi dire, si « le vent souffle » sur le moulinet « dans le bon sens » en un point de l'orbite, il souffle « dans le mauvais sens » au point diamétralement opposé. Comme quoi le moulinet ne risque pas de s'emballer...

Or, en orbite *elliptique* il en est tout autrement. La pression cinétique est sensiblement plus forte au périgée qu'à l'apogée, si bien que les perturbations du mouvement à l'apogée ne compensent pas celles qui se manifestent au périgée : il se produit une accumulation graduelle des perturbations. Sur les courbes intégrales de la figure 12.5 les points représentatifs « avancent » plus qu'ils ne « reculent » pendant chaque révolution de période T_ν, et au bout de quelques révolutions on découvre une évolution tangible des paramètres L, ρ, ϑ.

Ce changement essentiel de l'orientation initiale fait prendre au courant contraire, au périgée, une direction différente par rapport au satellite, ce qui conduit finalement les paramètres du mouvement à évoluer en sens inverse, et ainsi de suite. En fin de compte, l'évolution des paramètres de rotation et d'orientation du satellite en orbite elliptique acquiert un caractère lentement périodique (de période égale à quelques dizaines de révolutions). Les points représentatifs parcourent par suite une portion nettement agrandie des courbes intégrales de la figure 12.5, oscillant avec une période prolongée le long de cette portion de courbe ; il est à noter que ces oscillations de période prolongée résultent d'une multitude d'oscillations de période courte (égale à une révolution) qui n'ont pas été complètement compensées. La figure 12.5 permet de voir les portions de courbes intégrales parcourues en mouvement réel.

On remarque sur la figure 12.5, *b* que la valeur de L peut varier avec une période prolongée dans des limites suffisamment larges, ce qui équivaut à une variation de la vitesse angulaire de la précession propre du satellite. Tantôt la vitesse de la précession propre augmente (quand la composante du moment d'hélice suivant le vecteur **L** est positive en moyenne), tantôt elle diminue (lorsque le moment d'hélice change d'orientation par rapport à **L**).

Change en même temps le mode de rotation du satellite, caractérisé par ϑ. La satellite peut passer du culbutage ($\vartheta \approx \pi/2$) à la rotation autour de l'axe longitudinal ($\vartheta \approx 0$) et inversement, toujours avec une période prolongée. Les courbes intégrales de la figure 12.5, *b* permettent de voir aussi que le moment cinétique L est maximal pendant la rotation autour de l'axe longitudinal ($\cos\vartheta \approx 1$) et transversal ($\cos\vartheta \approx 0$), et minimal en régime transitoire, ce qui est pleinement conforme au tableau d'évolution établi par les moyens expérimentaux et représenté sur la figure 12.2.

Pour dégager la dynamique du mouvement à l'état pur, on doit considérer comme négligeables les oscillations de courte période. A cet effet, on fait un nouveau passage à la moyenne dans les équations d'évolution (12.4.4) suivant la variable rapide ν. Il vient

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_1 \, d\nu = \text{Cte} \neq 0.$$

Or

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_2\, d\nu = 0,$$

d'où il ressort aussitôt que

$$\lambda = \lambda_0 = \text{Cte} \tag{12.4.7}$$

à l'approximation consentie. Par conséquent, le vecteur **L** ne tourne plus autour de la direction de la vitesse au périgée $\mathbf{V}_\pi$ mais se déplace seulement dans le plan qui contient $\mathbf{V}_\pi$. Autrement dit, des deux angles définissant la position du vecteur **L** dans l'espace, l'un reste donc constant et l'autre — l'angle θ — varie. Compte tenu de (12.4.7), on déduit immédiatement de (12.4.6) l'intégrale première sous une nouvelle forme:

$$|\operatorname{tg}\vartheta|^{2\alpha}\,|\cos\vartheta|\,\sin^2\theta = C_\theta. \tag{12.4.8}$$

Les courbes intégrales (12.4.8) représentées sur la figure 12.5, *c* permettent de voir que les transitions périodiques du culbutage ($\vartheta \approx \pi/2$) à la rotation longitudinale du satellite ($\vartheta \approx 0$) font inévitablement osciller le vecteur moment cinétique avec la même période, dans une gamme à peu près égale à 180°. Or, cela est tout aussi conforme au tableau du mouvement dans l'espace du vecteur moment cinétique du satellite *Proton*-2 représenté sur la figure 12.3. Nous nous rappelons que le vecteur moment cinétique « se promène » du pôle Nord au pôle Sud du monde pendant que le satellite passe de la rotation longitudinale au culbutage et inversement. Nous constatons donc que notre théorie « colle » qualitativement aux données expérimentales.

En ce qui concerne la correspondance quantitative, point n'est besoin de la rechercher, vu l'approximation adoptée. En effet, nous avons passé outre aux moments gravitationnels (près de 5 % des moments aérodynamiques pour les *Proton*), aux facteurs dissipatifs, à la qualité aérodynamique du corps du satellite lui-même, à « l'ombre » jetée par le corps sur les aubes et à une multitude d'autres effets. Ce sont précisément les facteurs négligés qui expliquent en particulier la forme en huit de la trace du vecteur moment cinétique sur la sphère céleste (fig. 12.3) (nous n'avons expliqué que l'amplitude de 180° de cette trace).

Le problème aérodynamique posé avec rigueur devrait tenir compte de l'interaction entre les molécules de l'air et la surface du satellite bombardée par ces dernières au cours du vol. Bien plus, les données expérimentales sur le mouvement des *Proton* autour du centre de masse permettent de cerner le caractère de cette interaction (voir [12.9]).

Or, notre objectif était beaucoup plus modeste: construire un

modèle des phénomènes révélés. Et il faut dire que nous y avons réussi.

Notons enfin que les courbes intégrales définissent un point stationnaire stable (en moyenne suivant ν) $\theta^* = \pi/2$, $\sin^2 \vartheta^* = 2\alpha$. Si le mouvement s'inscrit dans ces conditions initiales (ou voisines de celles-ci), il ne les quittera plus ; dans ce cas, la valeur du vecteur moment cinétique $L = L_0$ restera, elle aussi, constante (quoique arbi-

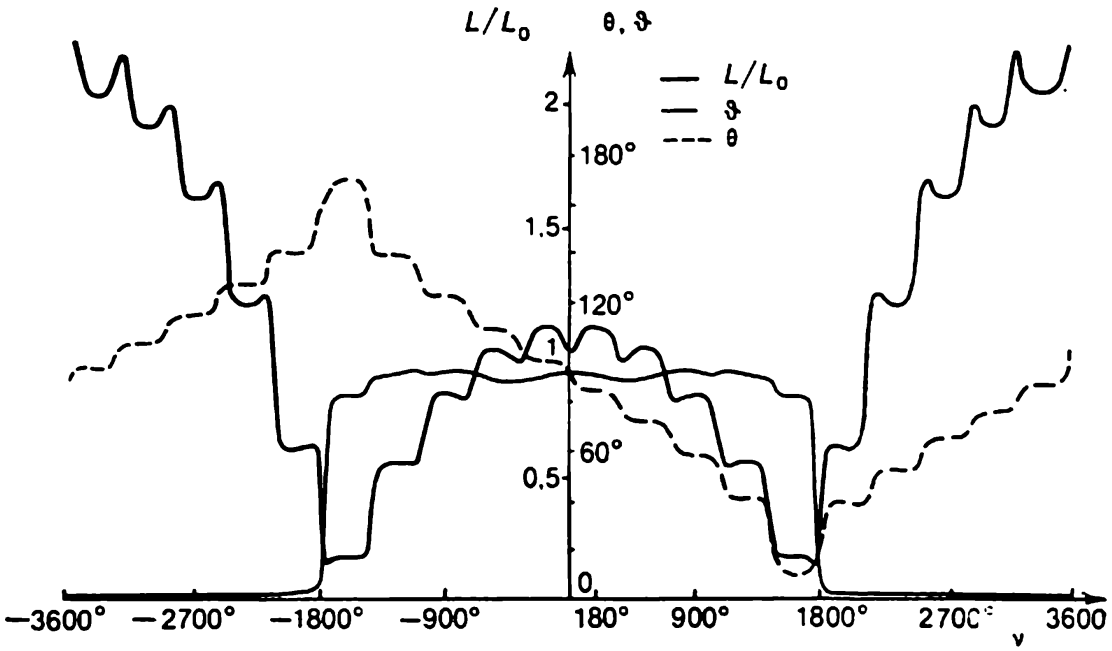


Fig. 12.6. Courbes des fonctions L/L_0 (ν), θ (ν), ϑ (ν)

traire). Comme nous l'avons déjà signalé, on peut prendre pour un satellite *Proton* dans notre modèle $a_0 = 2a_1$, auquel cas on a $\alpha = 1/3$ et la valeur stationnaire de l'angle ϑ^* se définit par

$$\cos \vartheta^* = 1/\sqrt{3} \quad (\vartheta^* \approx 54°,7).$$

Si les données initiales sont nettement différentes du point stationnaire, le mouvement subit des modifications profondes, ce que nous avons déjà vu.

On voit sur la figure 12.6 les courbes des fonctions θ (ν), ϑ (ν), L/L_0 (ν) dégagées par intégration numérique des équations (12.4.4). Pour faire mieux ressortir les effets, on a fortement majoré la valeur du moment d'hélice, ce qui permet de se rendre compte des oscillations de courte période qui se superposent à l'évolution lentement périodique. En ce qui concerne cette dernière, elle possède bien sûr toutes les propriétés dégagées ci-dessus.

C'est à dessein que l'auteur a choisi pour son dernier essai un problème qui serait impensable en mécanique ancienne, « d'avant les satellites », avant de faire ses adieux au lecteur.

Je sais que je suis mortel, que ma vie n'est pas longue,
et cependant,
Quand je contemple les révolutions complexes des étoiles,
Il me semble que mes pieds quittent le sol et qu'à la table
de Zeus
Je m'abreuve d'ambrosie, nourriture des dieux immortels
dans les cieux.

Ptolémée

BIBLIOGRAPHIE

Premier essai

1.1. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во « Наука », М., 1968.
1.2. Шкловский И. С., Вселенная. Жизнь. Разум. Изд. 4-е, изд-во « Наука », М., 1976.
1.3. Березкин Е. Н., Лекции по теоретической механике. Ч. I, Изд-во МГУ, 1967.
1.4. Лурье А. И., Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
1.5. Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. P., Gauthiers-Villars, 1852.
1.6. Bogolioubov N., Mitropolski Iou., Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations. P., Dinod, 1962.
1.7. Волосов В. М., Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Успехи матем. наук, т. 17, № 6 (108), 1962.
1.8. Моисеев Н. Н., Асимптотические методы нелинейной механики. Изд-во «Наука», 1969.
1.9. Арнольд В. И., Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, т. 18, № 5 (113), 1963.
1.10. Арнольд В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, т. 18, № 6 (114), 1963.
1.11. Демин В. Г., Судьба Солнечной системы. Изд-во « Наука», М., 1969.
1.12. Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П., Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты. Успехи физ. наук, т. 63, № 1а, 1957.
1.13. Охоцимский Д. Е., Динамика космических полетов. Конспект лекций. Изд-во МГУ, 1968.
1.14. Эльясберг П. Е., Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. Изд-во « Наука» , М., 1965.
1.15. Балк М. Б., Элементы динамики космического полета. Изд-во «Наука», М., 1965.
1.16. Белецкий В. В., Орбита экваториального спутника Земли. Сб. «Искусственные спутники Земли », вып. 13. 1962.
1.17. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Изд-во « Наука », М., 1965.
1.18. Белецкий В. В., О либрации спутника. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 3, 1959.
1.19. Седов Л. И., Динамические эффекты в движении искусственных спутников Земли. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 2, 1958.

Deuxième essai

2.1. Аксенов Е. П., Гребеников Е. А., Демин В. Г.. Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. Сб. « Искусственные спутники Земли ». вып. 8, 1961.
2.2. Brouwer D., Clemence G., Methods of Celestial Mechanics. New York, 1961.
2.3. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. Изд-во « Наука », М., 1968.
2.4. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы. Изд-во « Наука », М., 1964.
2.5. Кислик М. Д., Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 4, 1960.
2.6. Vinti J. P., Theory of an accurate intermediary orbit for satellite astronomy. J. Res. Nat. Bur. Standards, v. 63B, n° 3, 1959.
2.7. Алексеев В. М., Обобщенная пространственная задача двух неподвижных центров. Классификация движений. Бюлл. Ин-та теор. астрон., т. 10, № 4 (117), 1965.
2.8. Лурье А. И., Аналитическая механика. Физматгиз, М., 1961.
2.9. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во « Наука », М., 1968.

Troisième essai

3.1. Белецкий В. В., О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
3.2. Белецкий В. В., Описание плоских траекторий космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Труды конференции по общим и прикладным вопросам небесной механики, Москва, 1967, изд-во « Наука », 1972.
3.3. Nitā M. M., Über die Bewegung der Rakete in einen Zentralkraftfeld. Revue de Mecanique, Applique, v. 6, n° 2, 1961.
3.4. Демин В. Г., Об одном способе исследования движения космического аппарата в сфере действия планеты. Труды Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы, сер. теор. мех., т. 17, вып. 4, 1966.
3.5. Куницын А. Л., О движении ракеты в центральном поле сил с постоянным вектором реактивного ускорения. Космич. исследования, т. 4, № 2, 1966.
3.6. Копнин Ю. М., Эволюция орбиты спутника под влиянием малой возмущающей силы, постоянной по величине и направлению. Инженерный ж., т. 5, № 6, 1965.
3.7. Черников Ю. А., Эволюция финитных планетоцентрических орбит малых тел под влиянием прямого светового давления. Космич. исследования, т. 6, № 6, 1968.
3.8. Лидов М. Л., Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления. Космич. исследования, т. 7, № 4, 1969.

Quatrième essai

4.1. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во « Наука », М., 1968.
4.2. Моисеев Н. Д., Труды ГАИШ, вып. 15, 1945.
4.3. Лидов М. Л., О приближенном анализе эволюции орбит искусст-

венных спутников. Сб. « Проблемы движения искусственных небесных тел », Изд-во АН СССР, М., 1963.
4.4. Л и д о в М. Л., Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних сил. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 8, 1961.
4.5. Д е м и н В. Г., Судьба Солнечной системы. Изд-во « Наука », М., 1969.
4.6. Ч е б о т а р е в Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики. Изд-во « Наука », М., 1965.
4.7. К и с л и к М. Д., Сферы влияния больших планет и Луны. Космич. исследования, т. 2, № 6, 1964.
4.8. А р н о л ь д В. И., Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, т. 18, № 5 (113), 1963.
4.9. А р н о л ь д В. И., Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, т. 18, № 6 (114), 1963.
4.10. M o l c h a n o v A., The resonant structure of the solar system. Icarus — Intern. J. of the Solar System, v. 8, n° 2, 1968.
4.11. Б р ю н о А. Д., Неустойчивость в системах Гамильтона и распределение астероидов. Математический сборник, т. 83 (125) вып. 2 (10), 1970.
4.12. B r o w e r D., The problem of the Kikwood Gaps in the asteroid belt. Astron. J., v. 68, n° 3, 1963.
4.13. Р ж и г а О. Н., Результаты радиолокации планет. Космич. исследования, т. 7, № 1, 1969.
4.14. Ч е т а е в Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, М., 1962.

Cinquième essai

5.1. Е г о р о в В. А., О некоторых задачах динамики полета к Луне. Успехи физ. наук, т. 63, вып. 1а, 1957.
5.2. Е г о р о в В. А., Пространственная задача достижения Луны. Изд-во « Наука », М., 1965.
5.3. Л е в а н т о в с к и й В. И., Ракетой к Луне. Физматгиз, М., 1960.
5.4. Л е о н т о в и ч А. М., Об устойчивости лагранжевых периодических решений ограниченной задачи трех тел. Докл. АН СССР, т. 142, № 3, 1962.
5.5. D e p r i t A., D e p r i t - B a r t h o l o m e A., Stability of the triangular Lagrangian points. Astron. J., v. 72, n° 2, 1967.
5.6. М а р к е е в А. П., Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. Прикл. матем. и мех., т. 33, № 1, 1969.
5.7. Л и д о в М. Л., О х о ц и м с к и й Д. Е., Т е с л е н к о Н. М., Исследование одного класса траекторий ограниченной задачи трех тел. Космич. исследования, т. 2, № 6, 1964.
5.8. Л е в а н т о в с к и й В. М., Механика космического полета в элементарном изложении. Изд-во « Наука », М., 1970.
5.9. С е д о в Л. И., Орбиты космических ракет в сторону Луны. Сб. «Искусственные спутники Земли », вып. 5, 1960.
5.10. К о з л о в Н. Н., С ю н я е в Р. А., Э н е е в Т. М., Приливное взаимодействие галактик. Земля и Вселенная, № 6, 1974.
5.11. К о з л о в Н. Н., С ю н я е в Р. А., Э н е е в Т. М., Приливное взаимодействие галактик. Препринт № 76, Ин-т прикл. матем. АН СССР, М., 1971.
5.12. К о з л о в Н. Н., С ю н я е в Р. А., Э н е е в Т. М., Докл. АН СССР т. 204, № 3, 579, 1972.

5.13. Eneev T. M., Kozlov N. N., Sunjaev R. A., Astron. and Astroph., v. 22, n° 1, 1973.
5.14. Демин В. Г., Судьба Солнечной системы. Изд. 2-е, изд-во « Наука », М., 1975.

Sixième essai

6.1. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Изд-во « Наука », М., 1965.
6.2. Goldreich P., Peale S. J., The dynamics of planetary rotations. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, v. 6, Palo Alto, Calif., USA, 1968.
6.3. Экспресс-информация « Астронавтика и ракетодинамика », № 12, 1972.
6.4. Белецкий В. В., О либрации спутника. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 3, 1959.
6.5. Румянцев В. В., Об устойчивости стационарных движений спутников. ВЦ АН СССР, М., 1967.
6.6*). Stümpke H., Professor, Bau und Leben der Rhinogradentia mit einem Nachwort von Gerolf Steiner. Gustav Fischer Verlag, Stuttgart, 1967.
6.7. De Bra D. B., Principles and Developments in Passive Attitude Control. Science and Technologie Series. Vol. 9. AAS Publications 1966. Pp. 159-224.
6.8. Проблемы ориентации искусственных спутников Земли. Под ред. С. Ф. Сингера, изд-во « Наука », М., 1966.
6.9. Сарычев В. А., Исследование динамики системы гравитационной стабилизации. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 16, 1963.
6.10. Breakwell J. V., Pringle R., Nonlinear resonances affecting gravity-gradient stability. XV International Conr. IAF, Athen, 1965.
6.11. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы. Изд-во « Наука », М., 1968.
6.12. Kane T. R., Attitude stability of Earth-pointing satellites. AIAA J., v. 3, n° 4, 1965.
6.13. Хазин Л. Г., Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. Прикл. матем. и мех., т. 35, № 3, 1971.
6.14. Белецкий В. В., О законах Кассини. Препринт № 79, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1971.
6.15. Белецкий В. В., Эволюция вращения динамически-симметричного спутника. Космич. исследования, т. 1, № 3, 1963.
6.16. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника Земли относительно центра масс. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 1, 1958.
6.17. Черноусько Ф. Л., О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. Прикл. матем. и мех., т. 27, № 3, 1963.
6.18. Ишлинский А. Ю., Механика. В кн. « Октябрь и научный прогресс », т. 1, Изд-во АПН, М., 1967.
6.19. Белецкий В. В., Классификация движений искусственного спутника Земли около центра масс. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 6, 1961.
6.20. Трушин С. И., Об учете движения перигея орбиты в задаче о вращении и ориентации ИСЗ. Космич. исследования, т. 8, № 4, 1970.
6.21. Holland R. L., and Sperling (H. J., A first-order theory for

*) L'existence des références bibliographiques n'est pas une condition suffisante à l'existence de *Rhinogradentiae*.

the rotational motion of a triaxial rigid body orbiting and oblate primary. Astron. J., v. 74, n° 3, 1969. .
6.22. Черноусько Ф. Л., Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 3, № 3, 1963.
6.23. Lutze F. H., Abbitt M. W., Rotation locks for near-symmetrics satellites. Celest. Mech., n° 1, 1969.
6.24a. Торжевский А. П., Быстрое вращение искусственного спутника вокруг центра масс в резонансном режиме. Космич. исследования, т. 6, вып. 1, 1968.
6.24b. Торжевский А. П., Движение искусственного спутника относительно центра масс и резонансы. Astronautica Acta, v. 14, n° 3, 1969.
6.25. Маркеев А. П., Исследование устойчивости движения в некоторых задачах небесной механики. Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1970.
6.26. Ржига О. Н., Результаты радиолокации планет. Космич. исследования, т. 7, № 1, 1969.
6.27. Pettengill G. H., Dyce R. B., A radar determination of the rotation of the planet Mercury. Nature, n° 206, 1965, p. 1240.
6.28. Dyce R. B., Pettengill G. H., Shapiro I. I., Astron. J., v. 72, 1967, p. 351.
6.29. Colombo G., Rotational period of the planet Mercury. Nature, n° 208, 1965, p. 575.
6.30. Конашенок В. Н., Кондратьев К. Я., Новое о Венере и Марсе. Гидрометеоиздат, Л., 1970.
6.31. Котельников В. А. и др., Радиолокационные наблюдения Венеры в Советском Союзе в 1964 г. Докл. АН СССР, т. 163, вып. 1, 1965.
6.32. Carpenter R. L., Study of Venus by cw radar — 1964 results. Astron. J., v. 71, 1966, p. 142.
6.33. Goldstein R. M., Moon and Planets. North-Holland, Amsterdam, 1967.
6.34. Охоцимский Д. Е., Сарычев В. А., Система гравитационной стабилизации искусственных спутников. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 16, 1963.
6.35. Белецкий В. В., Резонансные явления во вращательных движениях искусственных и естественных небесных тел. Препринт № 10, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1975.
Beletskii V. V., Resonance phenomena at rotations of artifical and natural celestial bodies. In : « Satellite Dynamics — Symposium São Paulo, Brasil, June 19-21, 1974, Editor G.E.O. Giagaglia », Springer-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1975.
6.36. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. Под ред. Г. Н. Дубошина. Изд-во « Наука », М., 1971.
6.37. Tisserand F., Traité de mécanique céleste. Tome II, Paris, 1891.
6.38. Lagrange J. L., Œuvres, Tome V, Gauthier-Villars, Paris, 1870.
6.39. Laplace P. S., Mécanique céleste. Paris, 1793.
6.40. Хабибулин Ш. Т., Труды Казанской гор. астр. обсерват., № 34, Казань, 1966.
6.41. Куликов К. А., Гуревич В. Б., Основы лунной астрометрии. Изд-во « Наука », М., 1972.
6.42. Beletskii V. V., Resonance rotation of celestial bodies and Cassini's laws. Celestial Mechanics, v. 6, n° 3, 1972.
6.43. Лидов М. Л., Нейштадт А. И., Методы канонических преобразований в задачах о вращении небесных тел и законы Кассини. Препринт № 9, Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1973.
6.44. Colombo G., Cassini's second an third laws. Astron. J., n° 1344, 1969, November, p. 891.

6.45. Peale S., Generalized Cassini's laws. Astron. J., n° 1368, 1969 April, p. 483.
6.46. Holland R. L. and Sperling H. J., A first-order theory for the rotational motion of a triaxial rigid body orbiting and oblate primary. Astron. J., v. 74, n° 3, 1969.
6.47. Johnson D. B., Precession rate matching a space station in orbit about an oblate planet. J. of Spacecraft and Rockets, v. 10, n° 7, 1973.
6.48. Hara M., Effect of magnetic and gravitational torques on spunning satellite attitude. AIAA J., v. II, n° 12, 1973.
6.49. Белецкий В. В., Трушин С. И., Резонансы во вращении небесных тел и обобщенные законы Кассини. Сб. « Механика твердого тела », вып. 6, изд-во «Наукова думка », Киев, 1974.
6.50. Белецкий В. В., Трушин С. И., Устойчивость обобщенных законов Кассини. Сб. « Механика твердого тела », вып. 6, изд-во « Наукова думка », Киев, 1974.
6.51. Белецкий В. В., Движение спутника около центра масс в гравитационном поле. Изд-во МГУ, М., 1975.
6.52. Shapiro I. I., Radar astronomy, general relativity and celestial mecanics. In : « Modern questions of celestial mechanics », ed. Cremonese, Roma, 1968.
6.53. Хентов А. А., Влияние магнитного и гравитационного полей Земли на колебания спутника вокруг своего центра масс. Космич. исследования, т. 5, вып. 4, 1967.
6.54. Хентов А. А., Пассивная стабилизация искусственных спутников по магнитному полю Земли. Космич. исследования, т. 5, № 4, 1967.
6.55. Белецкий В. В., Хентов А. А., Магнитно-гравитационная стабилизация спутника. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 4, 1973.
6.56. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. Изд-во АН СССР, М., 1962.

Septième essai

7.1. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета с малой тягой. Изд-во « Наука », М., 1966.
7.2. Белецкий В. В., Егоров В. А., Разгон космического аппарата в сфере действия планеты. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
7.3. Охоцимский Д. Е., Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения. Космич. исследования, т. 2, № 6, 1964.

Huitième essai

8.1. Clarke A., The Wind from the Sun. London, Victor Gollantz Ltd, 1972.
8.2. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В., Механика космического полета. Проблемы оптимизации. Изд-во « Наука», М., 1975.
8.3. Скопцов А. П., Вариационная задача о выходе космического аппарата с солнечным парусом из сферы притяжения планеты. Сб. « Проблемы механики управляемого движения », вып. 1, Пермь, 1972.
8.4. Белецкий В. В., О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
8.5. Белецкий В. В., Описание плоских траекторий космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения. Труды конференции по общим и прикладным вопросам небесной механики, М., 1964.

Neuvième essai

9.1. Белецкий В. В., Гиверц М. Е., О движении пульсирующей системы в гравитационном поле. Космич. исследования, т. 5, № 6, 1967.
9.2. Белецкий В. В., Гравилет. Техника — молодежи, № 3, 1970.
9.3. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Изд-во « Наука », М., 1965.
9.4. Донов А. Е., Теория полета гравитолета. Космич. исследования, т. 9, № 3, 1971.
9.5. Гиверц М. Е., Один частный случай оптимизации управления гравилетом. Космич. исследования, т. 10, № 2, 1972.
9.6. Марков В. Е., Парирование внешних возмущений на космический аппарат методом изменения его геометрии масс. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 5, 1974.
9.7. Холшевников К. В., Марков В. Е., О стабилизации высоты перицентра. Космич. исследования, т. 13, № 2, 1975.
9.8. Schaefer J. F., Artifical satellite orbit shifting without mass expulsion utilizing gravity gradient. 17th Int. Astr. Congr., Madrid, 1966 ; Proc. 4 Astrodyn. Guidance and Control, Paris, 1967.

Dixième essai

10.1. Белецкий В. В., Егоров В. А., Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.
10.2. Белецкий В. В., Егоров В. А., Ершов В. Г., Анализ траекторий межпланетных полетов с двигателями постоянной мощности. Космич. исследования, т. 3, № 4, 1965.
10.3. Белецкий В. В., Голубков В. В., Егоров В. А., Ершов В. Г., Исследование траекторий полета с малой тягой. Второй Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов, Изд-во АН СССР, М., 1964.
10.4. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой. Изд-во « Наука », М., 1966.
10.5. Pontriaguine L. et coll. Théorie mathématique des processus optimaux. M., éd. « Mir », 1978.
10.6. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. Изд. 2-е, изд-во « Наука », М., 1969.
10.7. Melbourne W. G., Sauer C. G., Optimum interplanetary rendezvous with power-limited vehicles. AIAA J., v. 1, nº 1, 1963.
10.8. Платонов А. К., Оптимальные свойства корректирующих маневров при использовании двигателя с ограниченной тягой. Космич. исследования, т. 5, № 2, 1967.
10.9. Гродзовский Г. Л., Охоцимский Д. Е., Белецкий В. В., Иванов Ю. Н., Курьянов А. И., Платонов А. К., Сарычев В. А., Токарев В. В., Ярошевский В. А., Механика космического полета. Сб. « Механика в СССР за 50 лет », т. I, изд-во « Наука », М., 1968.

Onzième essai

11.1. Белецкий В. В., Новикова Е. Т., Об относительном движении связки двух тел на орбите. Космич. исследования, т. 7, № 3, 1969.
11.2. Белецкий В. В., Об относительном движении связки двух тел на орбите, II. Космич. исследования, т. 7, № 6, 1969.
11.3. Белецкий В. В., Егоров В. А., Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности. Космич. исследования, т. 2, № 3, 1964.

11.4. Беляев П. И., Леонов А. А., В открытом космосе. Газета «Правда» от 14 апреля 1965 г.
11.5. Егоров В. А., Некоторые вопросы оптимизации траекторий зондирования межпланетного пространства. Автоматика и телемеханика, № 5, 1970.
11.6. Arnold V., Méthodes mathématiques de la mécanique classique. M., « Mir », 1976.

Douzième essai

12.1. Аким Э. Л., Энеев Т. М., Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. Космич. исследования, т. 1, № 1, 1963.
12.2. Аким Э. Л., Определение поля тяготения Луны по движению искусственного спутника Луны « Луна-10 ». Космич. исследования, т. 4, № 6, 1966.
12.3. Белецкий В. В., Зонов Ю. В., Вращение и ориентация третьего советского спутника. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 7, 1961.
12.4. Белецкий В. В., Голубков В. В., Степанова Е. А., Хацкевич И. Г., Определение ориентации искусственных спутников по данным измерений. Препринт, Ин-т прикл. матем. АН СССР. Часть I. Метод. М., 1967. Часть II. Результаты. Анализ движения. М. 1968.
12.5. Белецкий В. В., Голубков В. В., Лавровский Э. К. Трушин С. И., Хацкевич И. Г., Определение ориентации и вращения искусственных спутников по данным измерений. Космич. исследования, т. 5, № 5, 1967.
12.6. Белецкий В.В., Голубков В. В., Хацкевич И. Г., Анализ вращения и ориентации спутника « Протон-2 ». Proc. XVIII International Astronautical Congr., Belgrad, 1967, Pergamon Press, 1968.
12.7. Голубков В. В., Хацкевич И. Г., Определение ориентации искусственных спутников Земли по заданной системе измерений. Космич. исследования, т. 7, № 4, 1969.
12.8. Белецкий В. В., Голубков В. В., Степанова Е. А. Хацкевич И. Г., Результаты определения ориентации спутника « Протон-2 » и описание его движения относительно центра масс. Космич. исследования, т. 7, № 4, 1969.
12.9. Белецкий В. В., Оценка характера взаимодействия аэродинамического потока со спутником по анализу движения спутника « Протон-2 » относительно центра масс. Космич. исследования, т. 8, № 2, 1970.
12.10. Энеев Т. М., Платонов А. К., Казакова Р. К., Определение параметров орбиты искусственного спутника по данным наземных измерений. Сб. « Искусственные спутники Земли », вып. 4, 1960.
12.11. Белецкий В. В., Движение искусственного спутника относительно центра масс. Изд-во « Наука », М., 1965.

INDEX

Accélération de la force d'attraction newtonienne 12
— petite, constante en grandeur et en direction 72
Active, stabilisation des satellites 162
Admissibles, commandes 273
Aires, intégrale des 15
Algorithme statistique de traitement de l'information 343
Amplitude, fonction 67
Angle de nutation 171
Anomalie excentrique 15
— vraie 14, 17
Aplatissement de la Terre 19, 46
Apogée 14
Argument de la latitude 17
Arnold, théorème de 115-118
Ascendant, nœud 16
Asymptotique, solution 31
Asymptotiques, méthodes de la mécanique non linéaire 26-28, 39
Attitude du satellite, détermination de 341
Axe longitudinal du satellite 170
— de symétrie dynamique du satellite 170
Axes d'inertie centraux principaux 149

Bessel, fonctions de 34

Canoniques, équations du mouvement perturbé 28, 40, 60, 97
Cassini, division de 191
—, lois de 190, 192 *sqq*
Commande « étagée » de la petite poussée 296
— optimale 272 *sqq*
—, vecteur 272
Commandes admissibles 273
Constante universelle de gravitation 9
Conventionnellement périodique, mouvement 113
Correction de la trajectoire 303
Cosinus elliptique 67

Dégénérescence limite 115
— propre 115
Delaunay, éléments de 28, 97
Delta d'amplitude 68
Demi-force vive, intégrale de 15, 74
Demi-grand axe de l'ellipse 14
Demi-paramètre focal de l'orbite 14
Dérivées isochrones du mouvement képlérien 228
Descendant, nœud 17
Détecteurs d'attitude du satellite 341
Distance angulaire 291
Division de Cassini 191
Domaine du mouvement faiblement perturbé 108

Echo (satellite) 72, 89
Effective, fonction de forces 127
Effet d'hélice 347
Elektron (satellite) 345
Eléments de Delaunay 28, 97
— de l'orbite 17
— osculateurs 17, 24, 28
Ellipse osculatrice 18
Elliptique, cosinus 67
— , sinus 67
Elliptiques, fonctions de Jacobi 63, 67, 68
Equation de Hamilton-Jacobi 60
— de Kepler 15
Equations canoniques du mouvement perturbé 28, 40, 60, 97
— en éléments de Delaunay : v. *Eléments de Delaunay*
— — osculateurs 24, 25
— d'évolution 27, 41 *sqq*, 175 *sqq*
— — de la rotation du satellite 173, 175
— de Hamilton 60
— de Lagrange de première espèce 307
— du mouvement perturbé 153
Equilibre relatif dans le champ gravitationnel 151 *sqq*
Espace de phases 336
Etoiles multiples 10, 109
Euler, problème de deux centres fixes de 51-52
Euler-Poinsot, mouvement de 169
Evanescente, fonction bornée 155
Evolution, équations de 27, 41 *sqq*, 175 *sqq*
Excentricité 14

Faible poussée : v. *Vol à faible poussée*
— — , voyage interplanétaire à 269 *sqq*
Fenêtre de tir 298, 301
Flot de phases 336
Fonction amplitude 67
— bornée 155
— — évanescente 155
— définie 154
— de forces 12, 147 *sqq*
— — effective 127
— de Hamilton 28, 40, 60, 97
— de Liapounov 154
— non bornée 155
— d'ombre 238
— semi-définie 154
Fonctions de Bessel 34
— elliptiques de Jacobi 63, 67, 68
Forces de marées 108, 206 *sqq*
Fourier, série de 38, 44, 98

Galaxies en interaction 140, 336-337
— particulières : v. *Galaxies en interaction*
Généralisées, impulsions 60
Grappe de deux corps en orbite 307, 319
— de quatre corps en orbite 332
Gravidyne 256

Gravitation, stabilisation des satellites par 162
Gravitationnel, potentiel 147 *sqq*

Hamilton, équations de 60
— , fonction de 28, 40, 60, 97
Hamiltonienne, fonction: v. *Fonction de Hamilton*
Hamilton-Jacobi, équation de 60
Hélice, effet de 347
Hill, surfaces de 132
Hypothèse de Moltchanov 118

Impulsions généralisées 60
Inclinaison de l'orbite 17
Instant de passage au périgée de l'orbite 15
Intégrale des aires 15, 20, 74
— de la demi-force vive 15, 74
— elliptique normale de Legendre de première espèce 67
— de Jacobi 130
— « laplacienne » du mouvement képlérien 74
— totale de première espèce 67
Irrégulier, système de coordonnées 155
Isochrones, dérivées du mouvement képlérien 288

Jacobi, fonctions elliptiques de 63, 67, 68
—, intégrale de 130

Kepler, équation de 15
Képlérien, mouvement 12

Lagrange, équations de première espèce de 307
—, points triangulaires de 135-136
Lagrangien, mouvement des planètes 101
Laplace, vecteur de 16, 100
—, théorème de 41, 94, 99, 100, 116
Legendre, intégrale elliptique normale de première espèce de 67
—, polynômes de 46, 54
Lentes, variables 28
Liapounov, fonction de 154
Ligne des nœuds 16, 101
Liouville, théorème de 336
Loi de la conservation de l'énergie 15
— de la gravitation universelle de Newton 9
Lois de Cassini 190, 192 *sqq*
— — généralisées 190, 198
Longitude du nœud ascendant 17
— du périgée 17
Lumière, pression de: v. *Pression de radiation solaire*

Manœuvre optimale locale de la voile solaire 238
Marées, forces de 108, 206 *sqq*
Méthode des moindres carrés 344
— de la moyenne 39, 44
— de la trajectoire de transport 278, 291, 298
— des transformations ponctuelles 326
Méthodes asymptotiques de la mécanique non linéaire 26-28, 39
Mise en moyenne 32, 44
— — des équations canoniques 40
Mise en vitesse à faible poussée 218 *sqq*
— — — —, monotone 228
Mission aller et retour 299
Module de l'intégrale elliptique 67
Moltchanov, hypothèse de 118
Moments d'inertie centraux principaux 150
Mouvement du centre de masse de la grappe de corps 308
Mouvement conventionnellement périodique 113
— du cosmonaute par rapport à la station orbitale 312
— d'Euler-Poinsot 169
— képlérien 12
— lagrangien des planètes 101
—, moyen 15
— non perturbé 17, 153, 158
— perturbé 18, 114
— quasi périodique 113
— relatif 288 *sqq*, 306 *sqq*
— rotatif: v. *Rotation propre...*
— au voisinage du satellite 288
Moteurs à faible poussée: v. *Vol à faible poussée*
Moyen mouvement 15
Moyenne, mise en 32, 44

Naine blanche 258, 265, 268
Nœud ascendant 16
— descendant 17
Nœuds de l'orbite 16
Nombre caractéristique de la fonction 155
Non linéaires, oscillations 162-163
Non perturbé, mouvement 17, 153, 158
Normale, intégrale elliptique de Legendre de première espèce 67
Nutation, angle de 171

Ombre de la Terre 238
Optimisation 272 *sqq*
Orbite, éléments de 17
— équatoriale 19
— képlérienne 12
Ordre de la résonance 43
Oscillations du satellite 29
— —, non linéaires 162-163
Osculateurs, éléments 17, 24, 28
Osculatrice, ellipse 18
—, orbite du satellite équatorial 19

Paradoxe aérodynamique du satellite 50, 222
— de la mise en vitesse à faible poussée 222
Paramétrique, résonance 32
Passive, stabilisation des satellites 162
Périgée 14
Perturbation 158
Perturbé, mouvement 18, 114
Phases, espace de 336
—, flot de 336
—, portrait de 184, 323
Plan de phases 323
Poincaré, théorème de 336-337
Points de libration 133-135
— — triangulaires 135
Polynômes de Legendre 46, 54
Portrait de phases 184, 323
Potentiel gravitationnel 147 *sqq*
Précession de l'orbite du satellite 48
— régulière du satellite 170
Pression de radiation solaire 72, 89, 234
Principe du maximum de Pontriaguine 273, 304
Problème de la commande optimale 272
— des deux centres fixes 51-52
— — — —, généralisé 58
— de *n* corps 94
— restreint du mouvement par rapport au centre de masse 310
— — des trois corps 52, 102, 129
— — — —, circulaire 129
Proton (satellite) 340-347, 353

Quasi périodique, mouvement 113

Radiation solaire, pression de 72, 89, 234
Radiodétection de Mercure 188
— de Vénus 189
Rapides, variables 29
Régulier, système de coordonnées 155
Relatif, mouvement 288 *sqq*, 306 *sqq*
Rendez-vous spatial 288
Réponse en amplitude 34
Résonance 32
— paramétrique 32
—, zone de 185
Résonances dans la rotation de la Lune, de Vénus, de Mercure 124-125
— dans un système de points mobiles 114
— dans les systèmes de satellites de Jupiter, de Saturne, d'Uranus 119
Restrictions 273, 275-277
Rhinogradentia 161
Rotation propre de la Lune 150-151, 186-187
— — de Mercure 187-189
— — du satellite artificiel 147 *sqq*, 340 *sqq*
— — de Vénus 189-190
— du type lunaire 186-187
— du type mercurial 187-190
Rotations rapides du satellite 160 *sqq*

Satellite dans le champ gravitationnel terrestre 45 *sqq*, 51 *sqq*, 70
Satellite équatorial 19
— « haltère » 250
— de la Lune 111
Satellites d'Uranus 107
Séculaires, perturbations 22, 41
Séparatrice 323
Série de Fourier 38, 44, 98
Sinus elliptique 67
Solution asymptotique 31
Sonde spatiale récupérable 317
Sphère gravitationnelle 112
— d'influence 111
— — de la Lune 111
— — de la Terre 111
Spirale monotone (universelle) de mise en vitesse 228 *sqq*
Stabilisation des satellites, active 162
— —, gravitationnelle 162
— —, passive 162, 209
Stabilité de l'équilibre relatif dans le champ gravitationnel 156
— de Liapounov 153
Stabilité du système solaire 41, 94, 99, 112, 116, 118
Surfaces de Hill 132
Système de coordonnées irrégulier 155
— — régulier 155
— — de transport 279
Système solaire, résonances dans 118
— —, stabilité de 41, 94, 99, 112, 116, 118

Théorème d'Arnold 115-118
— de Laplace 41, 94, 99-100, 116
— de Liouville 336
— de Poincaré 336-337
Tore à deux dimensions 113
— à *n* dimensions 113
Trajectoire spirale de mise en vitesse 218 *sqq*
— de transport 279
Trajectoires d'approche 136
Transformation ponctuelle 326

Uranus, forme comprimée de la planète 107-108
—, satellites de 107

Variables lentes 28
— rapides 29
Vecteur commande 272
— de Laplace 16, 100
— moment cinétique 170
Vitesse de la précession 171
— de la rotation propre du satellite 171
Voile solaire 234 *sqq*
— —, manœuvre optimale locale de 238
— — « optimale » 236
Vol à faible poussée 72, 217
— — — en direction de Jupiter 301
— — — — de Mars 291-303
— — — — de Vénus 293, 300
— — —, interplanétaire 269 *sqq*
— optimal 274
— à voile solaire 239 *sqq*
Voyage vers la Lune 129 *sqq*
Vraie, anomalie 14, 17

Zone de décrochage 323 *sqq*
— de résonance 185

ε-sphère 111
ε-surface 110

Imprimé en Union Soviétique

TABLE DES MATIÈRES

Dédicace 5

Préface de l'auteur 6

Premier essai. SUR LE MOUVEMENT PERTURBÉ ET NON PERTURBÉ D'UN SATELLITE, AVEC UNE PARENTHÈSE SUR LES MÉTHODES ASYMPTOTIQUES DE LA MÉCANIQUE NON LINÉAIRE 9

1. On a de la chance (9) 2. Le mouvement képlérien (12) 3. Mouvement perturbé. Eléments osculateurs (17) 4. Orbite osculatrice du satellite équatorial (19) 5. Equations en éléments osculateurs. Eléments de Delaunay (24) 6. Parenthèse sur les méthodes asymptotiques de la mécanique non linéaire. Oscillations du satellite autour du centre de masse. Mise en moyenne des équations canoniques (29) 7. Le satellite dans le champ gravitationnel terrestre (45)

Deuxième essai. SUR LA SECONDE NAISSANCE D'UN VIEUX PROBLÈME, OU CE QU'ON OBTIENT EN PLAÇANT DEUX MASSES À UNE DISTANCE PUREMENT IMAGINAIRE L'UNE DE L'AUTRE . . . 51

1. De Leonhard Euler à nos jours (51) 2. L'analogie des deux problèmes (52) 3. Intégration. Système de coordonnées (58) 4. Méthode de Hamilton-Jacobi (60) 5. Intégration (61) 6. Domaine des mouvements du satellite (63) 7. Fonctions elliptiques de Jacobi (67) 8. Mouvement d'un satellite polaire de la Terre (70)

Troisième essai. ENCORE UN VIEUX PROBLÈME QUI REVIENT À LA VIE 72

1. Quel est ce problème ? (72) 2. Quelques mots sur les équations du mouvement et sur leur intégration (73) 3. Mouvement plan (78) 4. Classification des trajectoires du mouvement plan (80) 5. Quelques mots sur l'influence de la lumière sur les spoutniks (89)

Quatrième essai. LE MOUVEMENT DES MONDES 94

1. De nouveau le « théorème de Laplace » et autres Choses Sérieuses (94) 2. Laissons tomber la Lune sur la Terre (101) 3. Domaine du mouvement faiblement perturbé (108) 4. Stabilité du système solaire (112) 5. Le système solaire est-il en résonance ? (118)

Cinquième essai. LE PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS, LE VOYAGE VERS LA LUNE ET L'ÉVOLUTION DES GALAXIES 129

1. Surfaces de Hill (129) 2. Parenthèse sur les points de libration (134) 3. Trajectoires d'approche et leur analyse (136) 4. Evolution des galaxies (140)

Sixième essai. ELLES VALSENT SUR LEURS ORBITES 147

1. Potentiel gravitationnel (147) 2. Sur la rotation de la Lune. Quelques rappels de la théorie de la stabilité (150) 3. Stabilité de l'équilibre relatif dans le champ gravitationnel (156) 4. *Rhinogradentia* est en orbite ! (159) 5. Sur la stabilisation passive des spoutniks (161) 6. Oscillations non linéaires (162) 7. Rotations rapides (169) 8. L'auteur cherche à intimider le lecteur (175) 9. Notation explicite du mouvement perturbé (176) 10. Pégase (177) 11. Lune, Mercure, résonances... (183) 12. Schiaparelli et compagnie (188) 13. Rotation en résonance des corps célestes et lois de Cassini généralisées (190) 14. Tendance au synchronisme des rotations dans les champs gravitationnels compliqués. Précession luni-solaire et nutation de l'axe terrestre (204) 15. Un modèle des marées et mise en résonance (205) 16. Stabilisation magnétique et magnéto-gravitationnelle (209)

Septième essai. UNE SPIRALE QUI MÈNE DANS L'ESPACE . . . 217

1. La faible poussée (217) 2. Paramètres et paradoxes de la mise en vitesse (218) 3. Une spirale monotone (228)

Huitième essai. DU SOLEIL PLEIN LES VOILES 234

Neuvième essai. LE GRAVIDYNE 250

1. Attraction d'un corps de dimensions finies (250) 2. Un vaisseau spatial pulsant (251) 3. Rattrapez votre station à la nage (256) 4. Le gravidyne et les lecteurs (260) 5. Le gravidyne et les résonances (262) 6. Le gravidyne et la science-fiction (265)

Dixième essai. LE VOL INTERPLANÉTAIRE: PETITE POUSSÉE, GRANDS OBJECTIFS 269

1. Introduction (269) 2. Plus de charge utile, moins de combustible (270) 3. Principe du maximum de Pontriaguine (272) 4. L'équation du vol optimal (274) 5. Laissons tomber toute contrainte (277) 6. Méthode de la trajectoire de transport (278) 7. Schéma de résolution du problème aux limites (280) 8. Intégration (282) 9. Sur les problèmes du mouvement relatif (288) 10. Résultats des calculs des trajectoires interplanétaires optimales (290) 11. Représentation des résultats du calcul des trajectoires par séries (298) 12. Les corrections des trajectoires interplanétaires (303)

Onzième essai. MOUVEMENT RELATIF DES CORPS EN ORBITE 306

1. Deux satellites sont en orbite (306) 2. Equations du mouvement relatif (310) 3. Mouvement libre du cosmonaute par rapport à la station orbitale (311) 4. Léonov et le couvercle (314) 5. Sonde spatiale (317) 6. *Boleadoras* cosmique (319) 7. Evolution du mouvement mixte (325) 8. Grappe de corps dans l'espace (332) 9. Nuage de particules en orbite et théorème du retour de Poincaré (333)

Douzième essai. MOULINET SPATIAL 340

1. Satellites *Proton* (340) 2. Comment on l'a découvert (341) 3. Ce qu'on a découvert (345) 4. Comment l'expliquer (347)

Bibliographie 356

Index 364